Computeralgebra

WS 2001/2002
Prof. Dr. K. Madlener
Übungsblatt 11

Aufgabe 11.1
Zeigen Sie:

a) Wenn $s, t \in T[X]$ und $s|t$, dann ist $s \leq t$ für jede Termordnung $<$ auf $T[X]$.

b) Sei R ein Integritätsbereich und $f, g \in R[X]$ mit $f, g \neq 0$. Dann gelten (i) $\mathrm{LT}(fg) = \mathrm{LT}(f) \cdot \mathrm{LT}(g)$, (ii) $\mathrm{LM}(fg) = \mathrm{LM}(f) \cdot \mathrm{LM}(g)$, (iii) $\mathrm{LC}(fg) = \mathrm{LC}(f) \cdot \mathrm{LC}(g)$ und (iv) $\mathrm{LT}(f+g) \leq \max\{\mathrm{LT}(f), \mathrm{LT}(g)\}$ für eine beliebige Termordnung $<$ auf $T[X]$.

Aufgabe 11.2
Zeigen Sie: Ist K ein Körper, $F \subseteq K[X]$, so gilt:

a) Sei $g_1, g_2, h \in K[X]$. Wenn $g_1 \longrightarrow_F g_2$, dann $g_1 + h \downarrow_F^* g_2 + h$.

b) Die Idealkongruenz modulo $\langle F \rangle$ ist die reflexiv-transitiv-symmetrische Hülle von $\longrightarrow_F$, d. h. $\equiv_{\langle F \rangle} = \longleftrightarrow_F^*$

Aufgabe 11.3
Betrachten Sie folgendes polynomiale Gleichungssystem $f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = 0$, wobei

$$\begin{aligned}
f_1 &= x_4 + b - d,\\
f_2 &= x_4 + x_3 + x_2 + x_1 - a - c - d,\\
f_3 &= x_3x_4 + x_1x_4 + x_2x_3 - ad - ac - cd,\\
f_4 &= x_1x_3x_4 - acd
\end{aligned}$$

Polynome in den Variablen x_1, x_2, x_3, x_4 sind und die Parameter a, b, c, d enthalten, d. h. $f_1, f_2, f_3, f_4 \in \mathbb{Q}(a, b, c, d)[x_1, x_2, x_3, x_4]$. Sei $<$ die lexikographische Ordnung mit $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. Zeigen oder widerlegen Sie: Das System hat unendlich viele Lösungen. Berechnen Sie eine Lösung des Systems (wenn es überhaupt eine Lösung besitzt).

Aufgabe 11.4
Seien $I = \langle f_1, \ldots, f_r \rangle$ und $J = \langle g_1, \ldots, g_s \rangle$ Ideale in $K[X]$, K Körper. Zeigen Sie:

a) $I \cap J = (\langle t \rangle \cdot I + \langle 1 - t \rangle \cdot J) \cap K[X]$, wobei t eine neue Variable ist.

b) $I : J$ ist definiert als $I : J = \{f \mid f \cdot g \in I \text{ für alle } g \in J\}$.
Es gilt: $I : J = \bigcap_{j=1}^{s} (I : \langle g_j \rangle)$ und $I : \langle g \rangle = \langle h_1/g, \ldots, h_m/g \rangle$, wobei $I \cap \langle g \rangle = \langle h_1, \ldots, h_m \rangle$.

Was bedeutet dies für die Berechenbarkeit der obigen Idealoperationen?

Informationen zur Vorlesung:
http://www-madlener.informatik.uni-kl.de/ag-madlener/teaching/ws2001-2002/ca/ca.html