# Entwurf und Analyse von Algorithmen

WS 1999/2000
Prof. Dr. K. Madlener
Übungsblatt 2

**Aufgabe 2.1.** a) Betrachten Sie noch einmal den Beweis, dass $\mathrm{KP}^*$ $\mathcal{NP}$-vollständig ist. Konstruieren Sie wie im Beweis zu den aussagenlogischen Formeln

$$(p \vee q \vee \neg r) \wedge (q \vee \neg r \vee s) \wedge (p \vee r \vee \neg s) \wedge (\neg t \vee s \vee \neg r)$$

sowie

$$\begin{aligned}(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r)\\ \wedge(\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)\end{aligned}$$

jeweils die Eingabe für $\mathrm{KP}^*$ und weisen sie nach, dass die obigen Formeln genau dann erfüllbar sind, wenn die entsprechende Eingabe für $\mathrm{KP}^*$ eine Lösung hat.

b) Betrachten Sie noch einmal den Beweis, dass DHC $\mathcal{NP}$-vollständig ist. Konstruieren Sie wie im Beweis zu den obigen aussagenlogischen Formeln jeweils den gerichteten Graphen für DHC und weisen Sie nach, dass die obigen Formeln genau dann erfüllbar sind, wenn der entsprechende gerichtete Graph einen Hamiltonzyklus hat.

**Aufgabe 2.2.** In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass das Knotenüberdeckungsproblem für ungerichtete Graphen $\mathcal{NP}$-vollständig ist.
Eine Knotenüberdeckung eines ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ ist eine Teilmenge $V' \subseteq V$ solcherart, dass jede Kante in $E$ einen Knoten aus $V'$ als Endpunkt hat.
Das Knotenüberdeckungsproblem für ungerichtete Graphen ist nun, für einen gegebenen ungerichteten Graphen $G$ und eine natürliche Zahl $k$ festzustellen, ob $G$ eine Knotenüberdeckung der Kardinalität $k$ hat.

a) Betrachten Sie die Abbildung unten. Hat der linke Graph Knotenüberdeckungen der Kardinalität 2, 3 oder 4? Begründung!

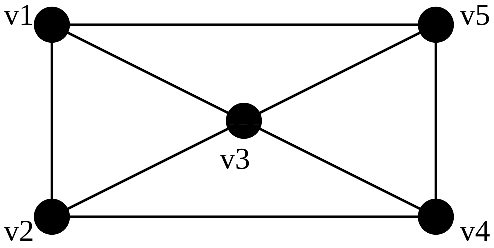
b) Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Der zu $G$ komplementäre Graph ist definiert als $comp(G) = (V, E')$, wobei $E' = \{(v, w) : v, w \in V \text{ und } v \neq w \text{ und } (v, w) \notin E\}$.

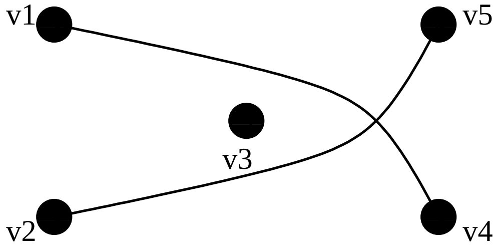
Beachten Sie, dass der rechte Graph der Abbildung unten der komplementäre Graph zum linken Graphen ist. Hat der linke Graph Cliquen der Größe 3? Was gilt für eine solche Clique, wenn man sie als Knoten-Teilmenge des rechten Graphen auffasst?

Zeigen Sie: Ist $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph, dann ist $V' \subseteq V$ genau dann eine Clique von $G$, wenn $V \setminus V'$ eine Knotenüberdeckung von $comp(G)$ ist.

c) Sei $G = (V, E)$ wieder ein ungerichteter Graph. Zeigen Sie, dass $G$ genau dann eine Clique der Kardinalität $k$ hat, wenn $comp(G)$ eine Knotenüberdeckung der Kardinalität $|V|-k$ hat.

d) Zeigen Sie zum Abschluss: Das Knotenüberdeckungsproblem für ungerichtete Graphen ist $\mathcal{NP}$-vollständig.




**Aufgabe 2.3.** Zeigen Sie, dass die Sprache

$$\{x : x \text{ ist Dezimaldarstellung einer natürlichen Zahl und } x \text{ ist prim}\}$$

in $\mathcal{NP} \cap \text{co}-\mathcal{NP}$ ist.

Hinweis: Es ist $p > 2$ genau dann eine Primzahl, wenn es eine natürliche Zahl $x$ mit $1 < x < p$ gibt, so dass einerseits $x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ ist und andererseits für jede Primzahl $q$, die $p-1$ teilt, $x^{(p-1)/q} \not\equiv 1 \pmod{p}$ gilt. Dabei bedeutet die Schreibweise $a \equiv b \pmod{c}$, dass $a$ und $b$ bei Division mit Rest durch $c$ den selben Divisionsrest besitzen.

**Aufgabe 2.4.** a) Zeigen Sie die Maximumsregel: Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ gegeben. Dann seien $p, q : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ durch $p(n) = f(n) + g(n)$ und $q(n) = \max(f(n), g(n))$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erklärt. Für eine beliebige Funktion $t : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ gilt dann $t \in O(p)$ genau dann, wenn $t \in O(q)$. In laxer Schreibweise: $O(f(n) + g(n)) = O(\max(f(n), g(n)))$.

b) Zeigen Sie die Limesregeln: Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ gegeben. Dann gilt:

1. Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} \in \mathbb{R}^+$, dann $f \in O(g)$ und $g \in O(f)$.
2. Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$, dann $f \in O(g)$, aber $g \notin O(f)$.
3. Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = +\infty$, dann $f \notin O(g)$, aber $g \in O(f)$.

c) Seien folgende Funktionen gegeben (wobei $\epsilon$ eine reelle Konstante mit $0 < \epsilon < 1$ sei):

$$n \log n \quad n^8 \quad n^{1+\epsilon} \quad (1+\epsilon)^n \quad n^2/\log n \quad (n^2 - n + 1)^4.$$

Ordnen Sie die $O(f)$ für alle obigen Funktionen $f$ mit Hilfe der Relationen $\subset$ und $=$ an.

d) Zeigen Sie, dass $\log(n!) \in \Theta(n \log n)$ gilt. Benutzen Sie *nicht* die Stirling'sche Formel!

Informationen zur Vorlesung:
http://www-madlener.informatik.uni-kl.de/ag-madlener/lectures/eaa/ws1999-2000/eaa.html