Entwurf und Analyse von Algorithmen

WS 1999/2000
Prof. Dr. K. Madlener
Übungsblatt 11

Aufgabe 11.1. Die 2-färbbaren Graphen (d. h. Graphen, deren Knoten so mit zwei Farben gefärbt werden können, dass keine zwei gleichfarbigen Knoten mit einer Kante verbunden sind) heißen auch bipartite Graphen.

Zeigen Sie zunächst, dass ein (gerichteter) Graph G genau dann bipartit ist, wenn G keine Kreise ungerader Länge enthält. (Dabei ist ein Kreis eine Folge $e_1, \ldots, e_n$ von paarweise verschiedenen Kanten ($n \geq 1$), so dass der Startknoten von e_1 auch der Endknoten von e_n ist.)

Geben Sie dann einen effizienten Algorithmus an, der entscheidet, ob ein gegebener (gerichteter) Graph bipartit (also 2-färbbar) ist, und im positiven Falle eine solche Färbung berechnet. Untersuchen Sie die Komplexität Ihres Algorithmus. (Hinweis: Denken Sie an Breitensuche.)

Aufgabe 11.2. Wir betrachten das Problem der Planung unabhängiger Aufträge: Gegeben seien m ($m \geq 1$) identische Prozessoren oder Maschinen und n ($n \geq 1$) Aufträge mit ihren Bearbeitungsdauern $t_i \in \mathbb{N}_+$ ($1 \leq i \leq n$). Gesucht ist eine Zuordnung der Aufträge an die Prozessoren, so dass der Endzeitpunkt aller Prozessoraktivitäten frühestmöglich ist.

Dieses Problem ist NP-vollständig. Wir betrachten daher ein Näherungsverfahren, genannt LPT (für „Longest Processing Time“). Dieses weist, sobald ein Prozessor frei wird, diesem den Auftrag zu, der unter allen noch nicht zugewiesenen Aufträgen die längste Bearbeitungszeit hat; bei mehreren solchen Kandidaten wird ein beliebiger gewählt. Anfangs sind natürlich alle Prozessoren frei.

a) Sei $m = 3$, $n = 6$ und $(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) = (8, 7, 6, 5, 4, 3)$. Geben Sie einen LPT-Plan für diese Probleminstanz an. Ist dieser Plan auch optimal? Zeigen!

   Führen Sie dies auch für $m = 3$, $n = 7$ und $(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7) = (5, 5, 4, 4, 3, 3, 3)$ durch.

b) Zeigen Sie, dass es einen Algorithmus gibt, der dieses Verfahren implementiert und dessen Laufzeit im schlechtesten Fall in $O(n \log n)$ liegt.

Wir wollen nun die Güte dieses Näherungsverfahrens untersuchen.

c) Die zu zeigende Aussage lautet: Wenn $F^*(I)$ der Endzeitpunkt eines optimalen Planes für m Prozessoren und Probleminstanz I ist und $\hat{F}(I)$ der Endzeitpunkt eines LPT-Planes für m Prozessoren und die selbe Probleminstanz I ist, so gilt

$$\frac{|\,F^*(I) - \hat{F}(I)\,|}{|\,F^*(I)\,|} \leq \frac{1}{3} - \frac{1}{3m}.$$

   Gehen Sie dazu wie folgt vor. Die Aussage gilt für $m = 1$ (wieso?). Nehmen Sie also an, es gebe ein $m > 1$, für das die Aussage nicht gilt. Dann definiere $(t_1, \ldots, t_n)$ eine Instanz mit minimalem n, so dass die Aussage nicht gilt (für dieses m). Man kann annehmen, dass $t_1 \geq \cdots \geq t_n$ gilt und dass der LPT-Plan die Aufträge in der Reihenfolge $1, \ldots, n$ zuweist (warum?). Sei nun k der Index des Auftrages mit dem spätesten Endzeitpunkt. Zeigen Sie, dass $k = n$. Zeigen Sie dann, dass kein optimaler Plan für I einem der Prozessoren mehr als zwei Aufträge zuweist. Zeigen Sie abschließend, dass generell, falls in einem optimalen Plan kein Prozessor mehr als zwei Aufträge zugewiesen bekommt, ein LPT-Plan schon ein optimaler Plan ist. Folgern Sie nun die obige Aussage.

d) Ist die obige Schranke von $(1/3 - 1/(3m))$ scharf? Betrachten Sie folgende Instanz I: $n = 2m + 1$, $t_i = 2m - \lfloor (i+1)/2 \rfloor$ $(i = 1, 2, \ldots, 2m)$ und $t_{2m+1} = m$. Bestimmen Sie sowohl einen LPT-Plan als auch einen optimalen Plan. Geben Sie dann für $F^*(I)$ und $\hat{F}(I)$ wie oben $|F^*(I) - \hat{F}(I)| / F^*(I)$ an und beantworten Sie die Frage.

Aufgabe 11.3. Wir haben gesehen, dass die LPT-Regel zu einem polynomialen $(1/3 - 1/(3m))$-Näherungsalgorithmus für das Problem der Planung n unabhängiger Aufträge für m Prozessoren geführt hat. Es gibt auch ein polynomiales Approximationsschema für dieses Problem. Es beruht auf folgender Planungsregel: (i) Sei k eine bestimmte feste ganze Zahl; (ii) Berechne einen optimalem Plan der k am längsten dauernden Aufträge; und (iii) plane die restlichen Aufträge nach der LPT-Regel ein.

a) Sei $m = 2$, $n = 6$ und $(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) = (8, 6, 5, 4, 4, 1)$ sowie $k = 4$. Berechnen Sie einen Plan nach der eben genannten Regel. Ist dies ein optimaler Plan? Wenn nicht, geben Sie einen optimalen Plan an.

b) Zeigen Sie: Wenn I eine Instanz des Planungs-Problems (für m Prozessoren) ist und $F^*(I)$ der Endzeitpunkt eines optimalen Planes für m Prozessoren und Probleminstanz I ist sowie $\hat{F}(I)$ der Endzeitpunkt eines Planes nach der neuen Regel für m Prozessoren und die selbe Probleminstanz I ist, so gilt

$$\frac{|F^*(I) - \hat{F}(I)|}{|F^*(I)|} \leq \frac{1 - 1/m}{1 + \lfloor k/m \rfloor}.$$

Zeigen Sie dazu einerseits $F^*(I) \geq \hat{F}(I) - \frac{m-1}{m} t_{k+1}$ und andererseits $F^*(I) \geq (1 + \lfloor k/m \rfloor) t_{k+1}$, wobei o. B. d. A. (warum?) $t_i \geq t_{i+1}$ für $1 \leq i < n$ sowie $n > k$ und $n > m$ gelte.

c) Geben Sie nun ein polynomiales Approximationsschema für unser Problem an. Berechnen Sie dazu zur Eingabe ϵ eine geeignete ganze Zahl k und verwenden Sie Teil b). Bedenken Sie, dass Sie auch einen Algorithmus angeben müssen, der einen optimalen Plan erstellt. Handelt es sich bei Ihrem Approximationsschema um ein voll polynomiales Approximationsschema? Zeigen!

Aufgabe 11.4. Führen Sie den Näherungsalgorithmus nach Christofides für das Δ-TSP-Problem für die Probleminstanz aus der Vorlesung (z. B. Folie 271) durch.