Entwurf und Analyse von Algorithmen

WS 1999/2000
Prof. Dr. K. Madlener
Übungsblatt 1

Aufgabe 1.1. Es bezeichne $\mathcal{N} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die Identität auf $\mathbb{N}$.

Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}$, alle Zeitschranken $T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (mit $T(n) \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$) und alle $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{DTime}_k(T) &\subseteq \mathrm{DTime}_{k+1}(\mathcal{N} + \epsilon \cdot (\mathcal{N} + T) + c) \\ \mathrm{NTime}_k(T) &\subseteq \mathrm{NTime}_{k+1}(\mathcal{N} + \epsilon \cdot (\mathcal{N} + T) + d), \end{aligned}$$

wobei c und d konstante natürliche Zahlen sind. (Falls $k > 1$ ist, kann man die Aussage sogar mit k anstelle von $k + 1$ zeigen, d. h. man braucht dann kein zusätzliches Band.)

Sprich: Es ist „immer" möglich, eine Rechnung um einen konstanten Faktor zu „beschleunigen".

Aufgabe 1.2. Überlegen Sie, ob nichtdeterministische Turingmaschinen bezüglich des Akzeptierens von Sprachen mächtiger sind als deterministische Turingmaschinen. Geben Sie dazu entweder eine Sprache an, die von einer NTM akzeptiert wird, aber von keiner DTM akzeptiert wird, oder zeigen Sie, dass es für jede Sprache, die von einer NTM akzeptiert wird, auch eine DTM gibt, die dieselbe Sprache akzeptiert.

Aufgabe 1.3. Sei $\leq_{\mathrm{m}}^{\mathrm{p}}$ das Symbol für die polynomiale Many-One-Reduzierbarkeits-Relation.

Zeigen Sie, dass für Sprachen L_1, L_2 und L_3 aus $L_1 \leq_{\mathrm{m}}^{\mathrm{p}} L_2$ und $L_2 \leq_{\mathrm{m}}^{\mathrm{p}} L_3$ auch $L_1 \leq_{\mathrm{m}}^{\mathrm{p}} L_3$ folgt. Sprich: Die Relation $\leq_{\mathrm{m}}^{\mathrm{p}}$ ist transitiv.

Aufgabe 1.4.

a) Zeigen Sie, dass SAT in $\mathcal{NP}$ liegt. Geben Sie dazu eine natürliche Kodierung aussagenlogischer Formeln in konjunktiver Normalform an und skizzieren Sie eine k-Band-NTM (mit einem k Ihrer Wahl), die

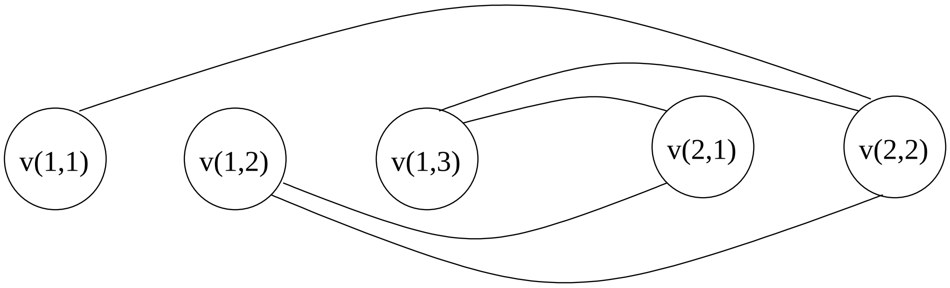
$$\mathrm{SAT} = \{w : w \text{ ist Kodierung einer erfüllbaren Formel in KNF}\}$$

in polynomialer Zeit akzeptiert.

b) Betrachten Sie folgende aussagenlogische Formel in KNF

$$(p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg r)$$

und folgenden Graphen:



Inwiefern modelliert der Graph die aussagenlogische Formel?

c) Zeigen Sie (unter der Verwendung Ihrer Erkenntnisse von b), dass folgendes Problem $\mathcal{NP}$-vollständig ist:

CLIQUE: Gegeben seien ein ungerichteter Graph G und eine natürliche Zahl k. Hat G einen Teilgraphen, der eine Clique der Größe k ist? Dabei ist eine Clique ein Graph, in dem jeder Knoten mit jedem anderen Knoten durch eine Kante verbunden ist.

Informationen zur Vorlesung:
http://www-madlener.informatik.uni-kl.de/ag-madlener/lectures/eaa/ws1999-2000/eaa.html