SS 2011 20. Juli 2011

Exercises for the Lecture Logics
Sheet 13

Prof. Dr. Klaus Madlener Delivery until keine Abgabe

Exercise 1: [clause form]
Transform the following formulas into clause form:

$$A_1 \equiv p(a) \rightarrow \forall x \exists y[\neg(p(x) \lor q(y,x)) \land \forall y[p(z)]]]$$
$$A_2 \equiv \forall x \forall y[p(x) \land \exists z[q(y,z) \lor r(y) \lor q(f(z),y)] \land \neg r(x)]$$

Exercise 2: [Herbrand-models]
Find a Herbrand-models for A_1 from exercise 1 and for its clause form.

Exercise 3: [MGU]
Determine an MGU for

$$S = \{p(x, z, g(x, y, f(z))), p(y, f(x), w)\}$$

Exercise 4: [Resolution]
Prove by resolution:

$$\forall x \exists z_1 \exists z_2 \forall y[(r(x) \rightarrow \neg q(y)) \land (r(x) \lor p(x)) \land (q(z_1) \lor p(x) \lor s(z_2)) \land \neg s(y) \land \neg p(z_2)]$$

is unsatisfiable.

Exercise 5: [clause form]
Transform the following formulas into clause form:
$A_1 \equiv \forall x \exists y[(p(x) \rightarrow q(x,y)) \land \forall z[q(x,z) \rightarrow \neg p(y)]]$
$A_2 \equiv \exists x \forall y[p(b) \lor (p(x) \rightarrow q(y, f(z)))]$

Exercise 6: [clause form]

1. What has to be shown in order to prove the soundness of skolemisation?
2. Why are steps 1 and 7 of the skolemisation correct?.
3. What is the relation between PKNF and claus form?

Exercise 7: [Herbrand-models]

Find Herbrand-models for the formulas from exercise 5.

Exercise 8: [MGU]

Determine MGUs for:

1. $\{p(x, f(x, y, z), g(g(y))), p(a, f(g(z), x, a), g(w))\}$
2. $\{p(x, z), p(f(y, z), g(a)), p(f(g(b), z), z)\}$

Exercise 9: [Resolution]

Prove by resolution:

1. $\models \forall z_1[p(z_1)] \vee \neg\forall x[(p(x) \vee q(x)) \wedge \exists z_2[\neg r(z_2) \wedge (r(z_2) \vee \neg q(x))]]$
2. $\forall y[(\forall y p(y) \vee r(x)) \wedge \neg q(x) \wedge (q(y) \vee \neg r(y)) \wedge \neg p(z)]$ is unsatisfiable.

Delivery: until keine Abgabe into the box next to room 34-401.4

on **Exercise 1:**
Bringen Sie die folgenden Formeln in Klauselform:

$$A_1 \equiv p(a) \to \forall x \exists y[\neg(p(x) \vee q(y,x)) \wedge \forall y[p(z)]]$$

1. Existenzieller Abschluss:
   $\exists z[p(a) \to \forall x \exists y[\neg(p(x) \vee q(y,x)) \wedge \forall y[p(z)]]]$
2. Eliminierung überflüssiger Quantoren:
   $\exists z[p(a) \to \forall x \exists y[\neg(p(x) \vee q(y,x)) \wedge p(z)]]$
3. Umbenennung mehrfach quantifizierter Variablen:
   keine vorhanden, also nichts zu tun
4. $\to$, $\leftrightarrow$ etc. ersetzen:
   $\exists z[\neg p(a) \vee \forall x \exists y[\neg(p(x) \vee q(y,x)) \wedge p(z)]]$
5. Negationen nach innen schieben:
   $\exists z[\neg p(a) \vee \forall x \exists y[\neg p(x) \wedge \neg q(y,x) \wedge p(z)]]$
6. Quantoren auf Wirkungsbereich einschränken:
   $\neg p(a) \vee \forall x[\neg p(x) \wedge \exists y[\neg q(y,x)]] \wedge \exists z[p(z)]$
7. Existenzquantoren eliminieren, Skolemfunktionen einführen:
   $\neg p(a) \vee (\forall x[\neg p(x) \wedge \neg q(f(x),x)] \wedge p(b))$
8. Allquantoren nach links schieben:
   $\forall x[\neg p(a) \vee (\neg p(x) \wedge \neg q(f(x),x) \wedge p(b))]$
9. Matrix in KNF und vereinfachen:

$$\begin{aligned}
&\forall x[\neg p(a) \vee (\neg p(x) \wedge \neg q(f(x),x) \wedge p(b))]\\
\models\!\!\!\dashv\; &\forall x[((\neg p(a) \vee \neg p(x)) \wedge (\neg p(a) \vee \neg q(f(x),x)) \wedge (\neg p(a) \vee p(b)))]\\
\models\!\!\!\dashv\; &\forall x[(\neg p(a) \wedge (\neg p(a) \vee \neg q(f(x),x)) \wedge (\neg p(a) \vee p(b)))]\\
\models\!\!\!\dashv\; &\forall x[\neg p(a)]\\
\models\!\!\!\dashv\; &\neg p(a)
\end{aligned}$$

Bei A_2 ist nicht viel zu tun, lediglich Schritt 7 muss durchgeführt werden. Hier geht es um die korrekte Anwendung dieses Schritts. Es müssen die freien Variablen durch Funktionsterme ersetzt werden, die in der existenzquantifizierten Teilformel vorkommen und die links davon allquantifiziert sind. Ein häufiger Fehler ist, dass hier einfach alle Variablen gewählt werden, die links vorkommen, was in diesem Fall zu

$$\begin{aligned}
A_2 \equiv &\forall x \forall y[p(x) \wedge \exists z[q(y,z) \vee r(y) \vee q(f(z),y)] \wedge \neg r(x)]\\
\leadsto &\forall x \forall y[p(x) \wedge (q(y,g(x,y)) \vee r(y) \vee q(f(g(x,y)),y)) \wedge \neg r(x)]
\end{aligned}$$

führen würde. **Dieses Ergebnis ist falsch!** Die Variable x ist zwar links universell quantifiziert, sie kommt aber nicht im Wirkungsbereich des Existenzquantors vor. Deshalb ist sie auch nicht bei der Definition der Skolemfunktion zu berücksichtigen. Das richtige Ergebnis ist also

$$A_2 \leadsto \forall x \forall y[p(x) \wedge (q(y,g(y)) \vee r(y) \vee q(f(g(y)),y)) \wedge \neg r(x)].$$

on **Exercise 2:**

Geben Sie für die Formel A aus Aufgabe 1 sowie für ihre Klauselform ein Herbrand-Modell an:

Modell für A: Es gibt keine (nicht-0-stelligen) Funktionskonstanten und nur eine Individuenkonstante. Daher ist das Herbrand-Universum $H_A = \{a\}$ und $I = (H_A, I_c, I_v)$ mit $I_c(a) = a$ (per Defnitionem), $I_c(p) = I_c(q) = \emptyset$ ist ein Herbrand-Modell.

Modell für Klauselform: Hier gibt es zusätzlich die einstellige Funktionskonstante f, so dass jetzt $H_A = \{a, f(a), f(f(a)), \ldots\}$ ist. Die Interpretation der beiden Prädikatskonstanten kann gleich bleiben, so dass I wie oben, jedoch mit dem neuen H_A ein Herbrand-Modell für die Klauselform ist. Hier kann man allerdichgs auch sehen, dass die beiden Formeln zwar erfüllbarkeitsäquivalent, aber nicht logisch äquivalent sind: Wählt man z.B. $I_c(q) = H_A \times H_A$, dann ist $q(y, x)$ immer erfüllt und damit A nicht erfüllt. Die Klauselform wird aber trotzdem erfüllt, weil hier die beiden Klauseln schon durch die gewählte p erfüllt werden.

on **Exercise 3:**

Bestimmen Sie einen MGU für

$$S = \{p(x, z, g(x, y, f(z))), p(y, f(x), w)\}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_0 &= \emptyset \\
S_0 &= S = \{p(\underline{x}, z, g(x, y, f(z))), p(\underline{y}, f(x), w)\} \\
D_0 &= \{x, y\} \\
\sigma_1 &= \sigma_0 \circ \{x \leftarrow y\} \\
S_1 &= S_0\sigma_1 = \{p(y, \underline{z}, g(y, y, f(z))), p(y, \underline{f(y)}, w)\} \\
D_1 &= \{z, f(y)\} \\
\sigma_2 &= \sigma_1 \circ \{z \leftarrow f(y)\} \\
S_2 &= S_1\sigma_2 = \{p(y, f(y), \underline{g(y, y, f(f(y)))}), p(y, f(y), \underline{w})\} \\
D_2 &= \{g(y, y, f(f(y))), w\} \\
\sigma_3 &= \sigma_2 \circ \{w \leftarrow g(y, y, f(f(y)))\} \\
S_3 &= S_2\sigma_3 = \{p(y, f(y), g(y, y, f(f(y))))\}
\end{aligned}$$

S_3 enthält nur noch ein Element, wir sind also fertig. Der allgemeinste Unifikator ist die Verkettung der drei Substitutionen $\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3 = \{x \leftarrow y, z \leftarrow f(y), w \rightarrow g(y, y, f(f(y)))\}$. Man beachte, dass die Verkettung nicht notwendigerweise nur die Vereinigung der Substitutionen ist. Die Schreibweise $\sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \sigma_3$ wäre i.A. falsch, da dies ein gleichzeitiges Ausführen der Substitutionen implizieren würde, was aber zu Inkonsistenzen bzw. einfach zu einem falschen Ergebnis führen würde. Bspw. ist $\{x \leftarrow y\} \cup \{y \leftarrow z\}$ nicht die selbe Substitution wie $\{x \leftarrow y\} \circ \{y \leftarrow z\}$, denn auf den Term $f(x, y)$ angewendet ergibt erstere $f(y, z)$, letztere aber $f(z, z)$.

on **Exercise 4:**
Beweisen Sie durch Resolution:

$$\forall x \exists z_1 \exists z_2 \forall y[(r(x) \rightarrow \neg q(y)) \wedge (r(x) \vee p(x)) \wedge (q(z_1) \vee p(x) \vee s(z_2)) \wedge \neg s(y) \wedge \neg p(z_2)]$$

ist unerfüllbar.
Zuerst bringen wir die Formel in Klauselform:

$$\begin{aligned}
&\forall x \exists z_1 \exists z_2 \forall y[(r(x) \rightarrow \neg q(y)) \wedge (r(x) \vee p(x)) \wedge (q(z_1) \vee p(x) \vee s(z_2)) \wedge \neg s(y) \wedge \neg p(z_2)] \\
\rightsquigarrow &\forall x \exists z_1 \exists z_2 \forall y[(\neg r(x) \vee \neg q(y)) \wedge (r(x) \vee p(x)) \wedge (q(z_1) \vee p(x) \vee s(z_2)) \wedge \neg s(y) \wedge \neg p(z_2)] \\
\rightsquigarrow &\forall x \forall y[(\neg r(x) \vee \neg q(y)) \wedge (r(x) \vee p(x)) \wedge (q(f(x)) \vee p(x) \vee s(g(x))) \wedge \neg s(y) \wedge \neg p(g(x))]
\end{aligned}$$

Dies entspricht der Klauselmenge

$$\{\{\neg r(x_1), \neg q(y_1)\}, \{r(x_2), p(x_2)\}, \{q(f(x_3)), p(x_3), s(g(x_3))\}, \{\neg s(y_4)\}, \{\neg p(g(x_5))\}\}$$

Der Resolutionsbeweis ist der folgende:

$K_1 = \{\neg r(x_1), \neg q(y_1)\}$,	Klauselmenge
$K_2 = \{r(x_2), p(x_2)\}$,	Klauselmenge
$K_3 = \{\neg q(y_1), p(x_2)\}$	Res(K_1, K_2)
$K_4 = \{q(f(x_3)), p(x_3), s(g(x_3))\}$,	Klauselmenge
$K_5 = \{\neg s(y_4)\}$,	Klauselmenge
$K_6 = \{q(f(x_3)), p(x_3)\}$	Res$(\mathrm{K}_4, \mathrm{K}_5)$ mit $y_4 \leftarrow g(x_3)$
$K_7 = \{p(x_3)\}$	Res$(\mathrm{K}_3, \mathrm{K}_6)$ mit $y_3 \leftarrow f(x_3)$
$K_8 = \{\neg p(g(y_5))\}$	Klauselmenge
$K_9 = \square$	Res$(\mathrm{K}_7, \mathrm{K}_8)$ mit $x_3 \leftarrow g(y_5)$.

on **Exercise 5:**
Bringen Sie die folgenden Formeln in Klauselform:
$A_1 \equiv \forall x \exists y[(p(x) \rightarrow q(x,y)) \wedge \forall z[q(x,z) \rightarrow \neg p(y)]]$:

1. Existenzieller Abschluss: Nichts zu tun.
2. Eliminierung überflüssiger Quantoren: Nichts zu tun.
3. Umbenennung mehrfach quantifizierter Variablen: Nichts zu tun.
4. $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ etc. ersetzen:
   $\forall x \exists y[(\neg p(x) \vee q(x,y)) \wedge \forall z[\neg q(x,z) \vee \neg p(y)]]$
5. Negationen nach innen schieben: Nichts zu tun.
6. Quantoren auf Wirkungsbereich einschränken:
   $\forall x \exists y[(\neg p(x) \vee q(x,y)) \wedge \forall z \neg q(x,z) \vee \neg p(y)]$
7. Existenzquantoren eliminieren, Skolemfunktionen einführen:
   $\forall x[(\neg p(x) \vee q(x,f(x))) \wedge \forall z \neg q(x,z) \vee \neg p(f(x))]$

8. Allquantoren nach links schieben:
   $\forall x \forall z[(\neg p(x) \vee q(x, f(x))) \wedge \neg q(x,z) \vee \neg p(f(x))]$
9. Matrix in KNF und vereinfachen:

$$\begin{aligned} & \forall x \forall z[(\neg p(x) \vee q(x, f(x))) \wedge \neg q(x,z) \vee \neg p(f(x))] \\ \models\!\!\!\Rightarrow\!\!\!\!\dashv & \forall x \forall z[(\neg p(x) \vee q(x, f(x)) \vee \neg p(f(x))) \wedge (\neg q(x,z) \vee \neg p(f(x)))] \end{aligned}$$

$A_2 \equiv \exists x \forall y[p(b) \vee (p(x) \rightarrow q(y, f(z)))]$:

1. Existenzieller Abschluss:
   $\exists z \exists x \forall y[p(b) \vee (p(x) \rightarrow q(y, f(z)))]$
2. Eliminierung überflüssiger Quantoren: Nichts zu tun.
3. Umbenennung mehrfach quantifizierter Variablen: Nichts zu tun.
4. $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ etc. ersetzen:
   $\exists z \exists x \forall y[p(b) \vee \neg p(x) \vee q(y, f(z))]$
5. Negationen nach innen schieben: Nichts zu tun.
6. Quantoren auf Wirkungsbereich einschränken:
   $p(b) \vee \exists x[\neg p(x)] \vee \exists z \forall y q(y, f(z))$
7. Existenzquantoren eliminieren, Skolemfunktionen einführen:
   $p(b) \vee \neg p(a) \vee \forall y q(y, f(c))$
8. Allquantoren nach links schieben:
   $\forall y[p(b) \vee \neg p(a) \vee q(y, f(c))]$
9. Matrix in KNF und vereinfachen: Nichts zu tun.

on **Exercise 6:**

1. Was muss für die Korrektheit der Skolemisierung gezeigt werden?
   - Entscheidend ist die Erfüllbarkeitsäquivalenz. Die Klauselform A' von A ist erfüllbar, genau dann, wenn A erfüllbar ist.
2. Begründen Sie für die Schritte 1 und 7 der Skolemisierung, warum sie korrekt sind.
   - Schritt 1 führt dazu, dass ganz außen Existenzquantoren eingeführt werden, die dann später durch 0-stellige Konstanten wieder beseitigt werden. Eine erfüllende Interpretation von A muss die freien Variablen belegen. Eine erfüllende Interpretation von A' kann einfach gewonnen werden, indem man die neu eingeführten Konstanten entsprechend belegt. Umgekehrt geht das natürlich auch.
   - Schritt 7 ist der Kern der Transformation. Wesentlich ist die Eigenschaft, dass die neu eingeführten Funktionssymbole als Funktionen interpretiert werden, die genau das Element liefern, das zu den allquantifizierten Variablen passt, die an der betreffenden Stelle gültig sind.
3. In welcher Beziehung stehen die pränexe KNF und die Klauselform?
   - Die pränexe KNF ist eine logisch äquivalente Umformung, die Klauselform erfüllbarkeitsäquivalent. Es wäre ein Nachteil, zuerst in die pränexe KNF

umzuwandeln, und dann erst in Klauselform, weil die Umformung in KNF zu einer kombinatorischen Explosion führen kann, d.h. man sollte sie möglichst spät machen.

on **Exercise 7:**

Geben Sie für die Formeln aus Aufgabe 5 Herbrand-Modelle an.

$A_1 \equiv \forall x \exists y[(p(x) \to q(x,y)) \land \forall z[q(x,z) \to \neg p(y)]]$:
Es kommen keine Konstanten und keine Funktionssymbole vor. Also führen wir ein Konstantensymbol ein und das Herbrand-Universum ist $H_{A_1} = \{a\}$. Wählt man $p = \{a\}$, so ist die Formel erfüllt.

$A_2 \equiv \exists x \forall y[p(b) \lor (p(x) \to q(y, f(z)))]$ Hier kommen b und f vor, so dass $H_{A_2} = \{b, f(b), f(f(b)), \ldots\}$ ist. Die Formel wird z.B. durch $p = \{b\}$ erfüllt.

on **Exercise 8:**

Bestimmen Sie MGUs für:

1. $\{p(x, f(x,y,z), g(g(y))), p(a, f(g(z), x, a), g(w))\}$:

$$\begin{aligned}
\sigma_0 &= \emptyset \\
S_0 &= \{p(\underline{x}, f(x,y,z), g(g(y))), p(\underline{a}, f(g(z), x, a), g(w))\} \\
D_0 &= \{x, a\} \\
\sigma_1 &= \sigma_0 \circ \{x \leftarrow a\} \\
S_1 &= S_0\sigma_1 = \{p(a, f(\underline{a}, y, z), g(g(y))), p(a, f(\underline{g(z)}, x, a), g(w))\} \\
D_1 &= \{a, g(z)\}
\end{aligned}$$

a und $g(z)$ sind nicht unifizierbar, also gibt es keinen MGU.

2. $\{p(x,z), p(f(y,z), g(a)), p(f(g(b), z), z)\}$:

$$\begin{aligned}
\sigma_0 &= \emptyset \\
S_0 &= \{p(\underline{x}, z), p(\underline{f(y,z)}, g(a)), p(f(g(b), z), z)\} \\
D_0 &= \{x, f(y,z)\} \\
\sigma_1 &= \{x \leftarrow f(y,z)\} \\
S_1 &= S_0\sigma_1 = \{p(f(y,z), \underline{z}), p(f(y,z), \underline{g(a)}), p(f(g(b), g(a)), z)\} \\
D_1 &= \{z, g(a)\} \\
\sigma_2 &= \sigma_1 \circ \{z \leftarrow g(a)\} \\
S_2 &= S_1\sigma_2 = \{p(f(\underline{y}, g(a)), g(a)), p(f(\underline{g(b)}, g(a)), g(a))\} \\
D_2 &= \{y, g(b)\} \\
\sigma_3 &= \sigma_3 \circ \{y \leftarrow g(b)\} \\
S_3 &= S_2\sigma_3 = \{p(f(g(b), g(a)), g(a))\}
\end{aligned}$$

S_3 enthält nur noch ein Element, der MGU ist also die Verkettung der drei Substitutionen:

$$mgu = \{x \leftarrow f(g(b), g(a)), y \leftarrow g(b), z \leftarrow g(a)\}$$

on **Exercise 9:**
Beweisen Sie durch Resolution:

1. $\models \forall z_1[p(z_1)] \vee \neg\forall x[(p(x) \vee q(x)) \wedge \exists z_2[\neg r(z_2) \wedge (r(z_2) \vee \neg q(x))]]$ Zuerst negieren wir die Formel, bringen sie in Klauselform und stellen Sie als Klauselmenge dar:

$$\begin{aligned}
&\neg(\forall z_1[p(z_1)] \vee \neg\forall x[(p(x) \vee q(x)) \wedge \exists z_2[\neg r(z_2) \wedge (r(z_2) \vee \neg q(x))]]) \\
\rightsquigarrow &\exists z_1[\neg p(z_1)] \wedge \forall x[(p(x) \vee q(x)) \wedge \exists z_2[\neg r(z_2) \wedge (r(z_2) \vee \neg q(x))]] \\
\rightsquigarrow &\neg p(a) \wedge \forall x[(p(x) \vee q(x)) \wedge \neg r(f(x)) \wedge (r(f(x)) \vee \neg q(x))] \\
\rightsquigarrow &\forall x[\neg p(a) \wedge (p(x) \vee q(x)) \wedge \neg r(f(x)) \wedge (r(f(x)) \vee \neg q(x))] \\
\rightsquigarrow &\{\{\neg p(a)\}, \{p(x_1), q(x_1)\}, \{\neg r(f(x_2))\}, \{r(f(x_3)), \neg q(x_3)\}
\end{aligned}$$

   Der Resolutionsbeweis ist der folgende:

$$\begin{array}{ll}
K_1 = \{\neg p(a)\}, & \text{Klauselmenge} \\
K_2 = \{p(x_1), q(x_1)\}, & \text{Klauselmenge} \\
K_3 = \{q(a)\} & \text{Res}(K_1, K_2) \text{ mit } x_1 \leftarrow a \\
K_4 = \{\neg r(f(x_2))\}, & \text{Klauselmenge} \\
K_5 = \{r(f(x_3)), \neg q(x_3)\}, & \text{Klauselmenge} \\
K_6 = \{\neg q(x_3)\} & \text{Res}(\mathrm{K}_4, \mathrm{K}_5) \text{ mit } x_2 \leftarrow x_3 \\
K_7 = \Box & \text{Res}(\mathrm{K}_5, \mathrm{K}_6) \text{ mit } x_3 \leftarrow a.
\end{array}$$

2. $\forall y[(\forall y p(y) \vee r(x)) \wedge \neg q(x) \wedge (q(y) \vee \neg r(y)) \wedge \neg p(z)]$ ist unerfüllbar. Formel in Klauselform bringen und als Klauselmenge schreiben:

$$\begin{aligned}
&\forall y[(\forall y p(y) \vee r(x)) \wedge \neg q(x) \wedge (q(y) \vee \neg r(y)) \wedge \neg p(z)] \\
\rightsquigarrow &\exists x \exists z \forall y[(\forall y p(y) \vee r(x)) \wedge \neg q(x) \wedge (q(y) \vee \neg r(y)) \wedge \neg p(z)] \\
\rightsquigarrow &\exists x \exists z \forall y[(\forall y_1 p(y_1) \vee r(x)) \wedge \neg q(x) \wedge (q(y) \vee \neg r(y)) \wedge \neg p(z)] \\
\rightsquigarrow &\exists x[(\forall y_1 p(y_1) \vee r(x)) \wedge \neg q(x)] \wedge \forall y[q(y) \vee \neg r(y)] \wedge \exists z \neg p(z) \\
\rightsquigarrow &(\forall y_1 p(y_1) \vee r(a)) \wedge \neg q(a) \wedge \forall y[q(y) \vee \neg r(y)] \wedge \neg p(b) \\
\rightsquigarrow &\forall y \forall y_1[(p(y_1) \vee r(a)) \wedge \neg q(a) \wedge (q(y) \vee \neg r(y)) \wedge \neg p(b)] \\
\rightsquigarrow &\{\{p(y_1), r(a)\}, \{\neg q(a)\}, \{q(y_2), \neg r(y_2)\}, \{\neg p(b)\}\}
\end{aligned}$$

   Resolutionsbeweis:

$$\begin{array}{ll}
K_1 = \{p(y_1), r(a)\}, & \text{Klauselmenge} \\
K_2 = \{\neg p(b)\}, & \text{Klauselmenge} \\
K_3 = \{r(a)\} & \text{Res}(K_1, K_2) \text{ mit } y_1 \leftarrow b \\
K_4 = \{q(y_2), \neg r(y_2)\}, & \text{Klauselmenge} \\
K_5 = \{q(a)\} & \text{Res}(K_3, K_4) \text{ mit } y_2 \leftarrow a \\
K_6 = \{\neg q(a)\}, & \text{Klauselmenge} \\
K_7 = \Box & \text{Res}(K_5, K_6) \text{ mit } y \leftarrow a.
\end{array}$$