SS 2009 14. Juni 2009

Übungen zur Vorlesung Logik
Blatt 9

Prof. Dr. Klaus Madlener Abgabe bis 1. Juli 2009 10:00 Uhr

43. Aufgabe: [Tautologien, Übung]
Zeigen Sie, dass die folgenden Formeln Tautologien sind:

$A_1 \equiv (a = 3 \to (q \to \forall y[a = y \to y = 4])) \to ((a = 3 \to q) \to (a = 3 \to \forall y[a = y \to y = 4]))$

$A_2 \equiv \forall z \forall x[p(x)] \to p(f(a, 5))$

$A_3 \equiv \exists P \forall Q[P \to (Q \wedge r) \to P \vee r]$

$a_4 \equiv \exists P[P]$

44. Aufgabe: [Substitution, Übung]

1. Finden Sie eine Formel A, einen Term t und eine Individuenvariable x, so dass die Substitution $A_x[t]$ erlaubt ist, $A_x[t]$ allgemeingültig ist, aber A nicht allgemeingültig ist.
2. Gegeben sei die Substitution σ aus Aufgabe 47. Wenden Sie diese Substitution auf die folgenden Terme und Formeln an:
   $A_1 \equiv (x < 3 \to p(x_1))$
   $A_2 \equiv \exists x[x = 0 \vee P(x_3)]$
   $A_3 \equiv \forall x[\neg x_1 = 0]$
   $A_4 \equiv \forall x_1[\neg x_1 = 0] \to p$

45. Aufgabe: [Semantische Folgerung, Übung]
Es sei $A \in$ Form. Zeigen oder widerlegen Sie:

1. Es gilt $\exists y \forall x\ A \models \forall x \exists y\ A$.
2. $\exists y \forall x\ A$ folgt logisch aus $\forall x \exists y\ A$.
3. Aus $\forall x\ f(x) = g(x)$ folgt $f = g$ logisch.

46. Aufgabe: [Tautologien PL, 5P]
Zeigen Sie, dass die folgenden Formeln Tautologien sind:

$A_1 \equiv \forall x \exists P[P(x) \vee x = f(a)] \to (Q(y, z) \to \forall x \exists P[P(x) \vee x = f(a)])$

$A_2 \equiv \forall x[q(x)] \to q(h(g(a, f(b)), b, f(c)))$

$A_3 \equiv \forall z[\neg(x = f(x) \to p(f(x))) \to (p(f(x)) \to x = f(x))]$

$A_4 \equiv \exists P[P \to q \vee r]$

47. Aufgabe: [Substitution, 10 P]
Die Substitution σ sei durch

$$\begin{aligned}
\sigma(x_1) &= x + 3 \cdot x \\
\sigma(x_2) &= 3 - (x + x_1) \cdot 2 \\
\sigma(x_3) &= 42 \\
\sigma(x_4) &= f(a, g(b)) \\
\sigma(x_5) &= if\ (x > 3)\ then\ 5\ else\ 3 \\
\sigma(x_6) &= g(y * 2)
\end{aligned}$$

gegeben. Wenden Sie σ auf die folgenden Formeln an. Geben Sie jeweils mit an, ob die Substitution erlaubt ist.

$A_1 \equiv x_1 \geq x_3$

$A_2 \equiv \forall x[x = 42 \to \neg(x_4 = 3)]$

$A_3 \equiv \exists y[f(y) = 0 \to \forall x[x \geq x_2]]$

$A_4 \equiv p(x_1) \vee \forall x[x + 3 > x_6]$

$A_5 \equiv \forall x[x_5 = 5 \to x > 3]$

$A_6 \equiv x_3 < x_4 \vee \forall y[p(y) \vee y = 3]$

$A_7 \equiv \forall x_3[x_3 = 42]$

48. Aufgabe: [wichtige Sätze, 6 P]
Zeigen Sie:

1. $\{\forall x[3 \cdot x > 4], \exists x[p(x)], q(3+4)\} \models \forall x[42 > x] \to \exists x[p(x)]$
2. $\{p(a), p(x+3) \to \exists y[y > p(x+3)], p \vee q, p(x+3)\} \models \exists y[y > p(x+3)]$
3. $\{\forall x[3 \cdot x > 4], \exists x[p(x)], q(3+4)\} \models \forall y[\forall x[42 > x] \to \exists x[p(x)]]$
4. $\{\forall x[\neg(p(x) \to \exists y[q(f(x,x))])]\} \models \neg(\forall y[p(y)] \to q(f(x,x)))$
5. $\Gamma, A \models \neg B$ gdw. $\Gamma, B \models \neg A$

Hinweis: Benutzen Sie für 5. nicht das Deduktionstheorem und keine Wertetabelle und schreiben Sie nicht „gilt laut Vorlesung“.

Abgabe: bis 1. Juli 2009 10:00 Uhr im Kasten neben Raum 34/401.4