SS 2008 7. Mai 2008

Übungen zur Vorlesung Logik

Prof. Dr. Klaus Madlener Blatt 5

17. Aufgabe: [Tableaux, ohne Punkte zum Üben]
In Aufgabe 2 wurde eine Aussage über das Leben von Mr. X durch die Aussageform

$$X \equiv (E \to M) \land ((S \to F) \land ((M \lor F \to A) \land (\neg A)))$$

dargestellt. Konstruieren Sie für X ein vollständiges Tableau. Welche Eigenschaften von X kann man dem Tableaux ansehen? Stellen Sie mit Hilfe des Tableau eine Disjunktive Normalform für X auf.

18. Aufgabe: [Tableauxfolgerung, $1,5 + 1,5 + 5$ P]
Zeigen Sie

1. $(A \land \neg B) \vdash_\tau \neg((\neg A) \land (\neg B))$
2. $(A \land (A \to B)) \vdash_\tau B$
3. $A \to (B \to C) \vdash_\tau (A \to B) \to (A \to C)$

19. Aufgabe: [Kompaktheitssatz, $3 + 3$ P]

1. Zeigen Sie, dass es für eine Menge von Formeln Σ und eine Formel A genau dann ein abgeschlossenes Tableau für $\Sigma \cup \{\neg A\}$ gibt, wenn es für eine endliche Teilmenge $\Gamma \subset \Sigma$ ein abgeschlossenes Tableau für $\Gamma \cup \{\neg A\}$ gibt.
2. Zeigen Sie, dass 1. äquivalent zum Kompaktheitssatz der Aussagenlogik ist unter der Voraussetzung, dass $\Sigma \vdash_\tau A$ und $\Sigma \models A$ äquivalent sind.

Hinweis: Benutzen Sie das Lemma von König, das Ihnen aus anderen Veranstaltungen bekannt sein sollte. Suchen Sie ggf. mit den Stichworten Lemma und König im Internet.

20. Aufgabe: [Tableaux mit Äquivalenz, $4 + 1$ P]

1. In der Vorlesung wurden Tableaux für Aussageformen $A \in F$ definiert. Man kann aber auch Tableaux für $A \in F(\{\neg, \lor, \land, \to, \leftrightarrow\})$ definieren. Ist $A \equiv B \leftrightarrow C$ dann eine α- oder β-Formel und welche Komponenten hat diese Aussageform?
2. Wie würde man bei beliebigen anderen weiteren Operatoren verfahren?

Die folgenden Aufgaben setzen den Stoff aus dem Kapitel über Normalformen aus der Vorlesung voraus, das am 7.5. nicht vollständig behandelt wurde. Der Stoff ist selbständig zu erarbeiten.

21. Aufgabe: [Duale Formeln, 5P]
Es sei $A \in F(\{\neg, \vee, \wedge\})$ und $d(A)$ die duale Formel von A. Ferner sei φ eine Bewertung und φ' die durch $\varphi'(p) := 1 - \varphi(p)$ für alle $p \in V$ definierte Bewertung. Zeigen Sie $\varphi'(d(A)) = 1 - \varphi(A)$.

22. Aufgabe: [Klauselform, ohne Punkte zum selbst Üben]
Bringen Sie die Aussageform

$$X \equiv (E \to M) \wedge ((S \to F) \wedge ((M \vee F \to A) \wedge (\neg A)))$$

in Konjunktive Normalform (KNF), das heißt, finden sie eine logisch äquivalente Formel X' in Konjunktiver Normalform. $(A, E, F, S, M \in V)$

23. Aufgabe: [Größe von Normalformen, 4 + 10 P]
Folgendes sollte aus anderen Veranstaltungen bekannt sein: Seien $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Dann ist $\mathrm{O}(f) := \{g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \exists \epsilon \in \mathbb{R}_+, \exists n_0 \forall n > n_0 : g(n) \leq \epsilon f(n)\}$
Sei für eine Formel $A \in F$ die Länge $|A|$ definiert als die Anzahl der Vorkommen von Atomen, d.h. Variablen.
Zeigen Sie:

1. Zu jeder Formel $A \in F$ gibt es eine logisch äquivalente Formel $B \in F(\{\neg\vee, \wedge\})$ in NNF mit $|B| \in \mathrm{O}(|A|)$.
2. Zu jeder Formel $A \in F$ gibt es eine logisch äquivalente Formel B in KNF mit $|B| \in \mathrm{O}(2^{|A|})$.

Abgabe: bis 20. Mai 2008, 10:00 im Kasten neben Raum 34/401.4