Übungen zur Vorlesung Logik

Prof. Dr. Klaus Madlener Blatt 4

13. Aufgabe: [Beweise in $\mathcal{F}_0$, 10P]

Beweisen Sie zwei der Aussageformen 8, 9 oder 10 aus Beispiel 1.22 in den Folien im deduktiven System $\mathcal{F}_0$.

14. Aufgabe: [Deduktive Systeme, 4P]

Das deduktive System $\hat{\mathcal{F}}$ entstehe aus $\mathcal{F}_0$ durch Ändern des ersten Axiomenschemas in

$$A \to (A \to B).$$

1. Ist $\hat{\mathcal{F}}$ vollständig?
2. Ist $\hat{\mathcal{F}}$ korrekt?

15. Aufgabe: [Korrekte Regeln, 4P]

Ein Regelschema beschreibt eine Menge von Regeln, die auch die Menge der Instanzen des Schemas genannt wird. (Vgl. F. 46). Jede beliebige Teilmenge der Instanzen eines Regelschemas kann für sich als Schema betrachtet werden. Analog kann man auch Axiomenschemata und ihre Instanzen betrachten.

Definition: Ein Regelschema $R_0 : \dfrac{A_1, \dots, A_n}{A}$ heißt *korrekt* für die Aussagenlogik, wenn für jede Instanz $\dfrac{B_1, \dots, B_n}{B}$, wobei $B_1, \dots, B_n, B \in F$, gilt:

Wenn $B_1, \dots, B_n$ Tautologien sind, dann auch B.

1. Zeigen Sie: Ist $\mathcal{F} = (\mathrm{Ax}, R)$ ein deduktives System mit korrekten Axiomen (d.h. Tautologien als Axiome) und korrekten Regeln, so ist $\mathcal{F}$ korrekt.
2. Geben Sie eine korrektes Regelschema $\dfrac{A_1, \dots, A_k}{A}$ mit einer Instanz $\dfrac{B_1, \dots, B_k}{B}$ an, so dass $B_1, \dots, B_k \not\models B$.

16. Aufgabe: [Natürliche Kalküle, 8P]

Falls die Vorlesung am 30.4. nicht bis zum Ende des Abschnitts über natürliche Kalküle kommt, ist der restliche Stoff selbständig zu erarbeiten.

1. Begründen Sie, warum das Hilbert-Kalkül korrekt ist. Skizzieren Sie einen Beweis.
2. Begründen Sie, warum das Hilbert-Kalkül vollständig ist. Skizzieren Sie einen Beweis. Hinweis: Verwenden Sie, dass $\mathcal{F}_0$ vollständig ist.
3. Sind die Argumentationen aus 1. und 2. auch auf das Gentzen-Kalkül anwendbar?

Abgabe: bis 2008/05/06, 10:00 Uhr im Kasten neben Raum 34/401.4