Grundlagen der Programmierung

SS 05
Prof. Dr. K. Madlener
Lösungshinweise zu Übungsblatt 6

Aufgabe 6.1. Sei $\widehat{f}(x,b) = \mu y \leq b.(y \cdot y \leq x \wedge (y+1)\cdot(y+1) > x)$ f.a. $x, b \in \mathbb{N}$.
Sei weiter $f(x) = \widehat{f}(x,x)$ f.a. $x \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 6.2. a) (i) Beh.: $max : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit

$$max(x,y) = \begin{cases} x & x \geq y \\ y & \text{, sonst} \end{cases}$$

f.a. $x, y \in \mathbb{N}$ ist in $\mathbb{P}(\mathbb{N})$.

Bew.: Es gilt: $max(x,y) = x + (y - x)$ f.a. $x, y \in \mathbb{N}$
Dabei bezeichnet $-$ hier die nichtnegative Differenz (siehe Skript Bsp. 6.9) Nach Vorlesung sind $+, - \in \mathbb{P}(\mathbb{N})$ und damit auch $max \in \mathbb{P}(\mathbb{N})$.
Um einen primitiv rekursiven Ausdruck für max angeben zu können, zeigen wir zunächst, dass folgender primitiv rekursiver Ausdruck die nichtnegative Differenz $- : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ darstellt:

$$\pi := REK(PROJ(1), KOMP(PRED, PROJ(2)))$$

Dabei bezeichnet PRED die Vorgänger-Funktion in $\mathbb{N}$ (siehe Skript Bsp. 6.4) Wir zeigen mit vollständiger Induktion über y, dass gilt:
$f_\pi(x,y) = x - y$.

I.A.: $f_\pi(x,0) = f_{PROJ(1)}(x,0) = x = x - 0$

I.V.: Es gelte $f_\pi(x,y) = x - y$

I.S.:
$$\begin{aligned} f_\pi(x,y+1) &= f_{KOMP(PRED,PROJ(2))}(x, f_\pi(x,y), y) \\ &\underbrace{=}_{I.V.} f_PRED(f_{PROJ(2)}(x, x-y, y)) \\ &= PRED(x-y) \\ &= \begin{cases} (x-y)-1 & \text{falls } x-y > 0 \\ 0 & \text{falls } x-y \leq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} x-(y+1) & \text{falls } x > y \\ 0 & \text{falls } x \leq y \end{cases} \\ &= x-(y+1) \text{ (Def. } -) \end{aligned}$$

Ein primitiv rekursiver Ausdruck für $+ : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ ist laut Vorlesung:
$\tau := PEK(PROJ(1), KOMP(SUCC, PROJ(2)))$.
Für $max : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ ergibt sich damit der Ausdruck $\mathbb{K}$:
$\mathbb{K} := KOMP(\tau, PROJ(1), KOMP(\pi, PROJ(2), PROJ(1)))$.

Alt. Bew.: Mit Lemma 6.18 und der Definition $max(x,y) = \begin{cases} y & x < y \\ x & \text{, sonst} \end{cases}$

erhalten wir:

$$\begin{aligned} max(x,y) &= \chi_<(x,y) \cdot y + (1 - \chi_<(x,y)) \cdot x \\ &= sg(y-x) \cdot y + (1 - sg(y-x)) \cdot x \end{aligned}$$

Primitiv rekursiver Ausdruck füer sgn:

$$SG = REK(NULL, KOMP(SUCC, NULL))$$

Primitiv rekursiver Ausdruck füer Konstante 1:

$$1 = KOMP(SUCC, NULL)$$

Primitiv rekursiver Ausdruck füer die Multiplikation:

$$MULT(X,Y) = REK(NULL, KOMP(ADD, PROJ(1), PROJ(2)))$$

(Beweise für die Korrektheit der primitiv rekursive Ausdrücke sind mit vollständiger Induktion analog – (s.o.) zu führen)

Damit ergibt sich: $max(x,y) = f^{(2)}_{MAX}(x,y)$ mit

$MAX = KOMP(\tau, KOMP(MULT, KOMP(SG,$
$KOMP(\pi, PROJ(2), PROJ(1))), PROJ(2)),$
$KOMP(MULT, KOMP(\pi, 1, KOMP(SG,$
$KOMP(\pi, PROJ(2), PROJ(1)))), PROJ(1)))$

(ii)Beh.: $min : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $min(x,y) = \begin{cases} x & \text{,falls } x \leq y \\ y & \text{sonst} \end{cases}$

f.a. $x, y \in \mathbb{N}$ ist in $\mathbb{P}(\mathbb{N})$.

Bew.: Es gilt $min(x,y) = (x+y) - max(x,y)$ f.a. $x, y \in \mathbb{N}$ (dabei bezeichnet $-$ hier wiederum die nichtnegative Differenz).
Nach Vorlesung sind $+, -, max \in \mathbb{P}(\mathbb{N})$ und daher auch $min \in \mathbb{P}(\mathbb{N})$.
Für $min : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ ergibt sich der primitiv rekursive Ausdruck $KOMP(\pi, \tau, \mathbb{K})$.
Dabei bezeichnet π den Ausdruck für $- : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, τ den Ausdruck für $+ : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ und $\mathbb{K}$ den Ausdruck für $max : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ aus (i).

Alt. Bew: $min(x,y) = sg(y-x) \cdot x + (1 - sg(y-x)) \cdot y$
(siehe auch Alt. Bew. für (i)). Damit ergibt sich als primitiv rekursiver Ausdruck für min:

$MAX = KOMP(\tau, KOMP(MULT, KOMP(SG,$
$KOMP(\pi, PROJ(2), PROJ(1))), PROJ(1)),$
$KOMP(MULT, KOMP(\pi, 1, KOMP(SG,$
$KOMP(\pi, PROJ(2), PROJ(1)))), PROJ(2)))$

(iii)Beh.: $ggT : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $ggT(x,y)$ ist der grösste gemeinsame Teiler von x und y ist in $\mathbb{P}(\mathbb{N})$.

Bew.: Möglichkeit 1:
Es gilt nach Definition von ggt:

$$ggT(x,y) = \begin{cases} x & y = 0 \\ y & x = 0 \text{ f.a. } x, y \in \mathbb{N}. \\ x - \mu_{z \le x}((x-z)|x \wedge (x-z)|y) & \text{sonst} \end{cases}$$

Nach Vorlesung sind $-, |, \wedge \in \mathbb{P}(\mathbb{N})$ und $\mathbb{P}(\mathbb{N})$ abgeschlossen bzgl. beschränkter μ-Rekursion. Auch Fallunterscheidungen dieser Art sind in $\mathbb{P}(\mathbb{N})$ erlaubt. Damit gilt: $ggT \in \mathbb{P}(\mathbb{N})$ Möglichkeit 2: Nutze aus, dass sich der größte gemeinsame Teiler
von x, y berechnen lässt durch:

$$ggT(x,y) = \begin{cases} x & \text{falls } y = 0 \\ ggT(y, x \bmod y) & \text{sonst} \end{cases}$$

Zum Beweis, dass diese Definition primitiv rekursiv ist: Nach Vorlesung ist Wertverlaufsrekursion primitiv rekursiv, und es gilt f.a. $y > 0$ $(y, x \bmod y) < (x, y)$ (mit geeigneter Ordnung $<$). Auch Fallunterscheidungen dieser Art sind primitiv rekursiv.

Möglichkeit 3:

$$ggT(x,y) = \mu a \le y.(a|x \wedge a|b \wedge \forall b((b \le y \wedge b|x \wedge b|y) \to b|a))$$

Siehe dazu auch Übungsblatt 3. Zum Beweis, dass diese Definition primitiv rekursiv ist: Nach Vorlesung sind Fallunterscheidung dieser Art primitiv rekursiv, $\mathbb{P}(\mathbb{N})$ abgeschlossen bzgl. beschränkter Allquantifizierung und bzgl. beschränkter μ-Rekursion und $\wedge$ und $| \in \mathbb{P}(\mathbb{N})$.

(iv)Beh.: kgV ist in $\mathbb{P}(\mathbb{N})$.

Bew.: $kgV(x,y) = (x \cdot y)\, div\, ggT(x,y)$. Da $\cdot, ggT, div \in \mathbb{P}(\mathbb{N}) \to kgV \in \mathbb{P}(\mathbb{N})$.

Alt. Bew.:

$$kgV'(x,y,m) = \mu a \le m.(x|a \wedge y|a \wedge \forall b \le m(x|b \wedge y|b \to a|b))$$
$$kgV(x,y) = kgV'(x,y,x \cdot y)$$

Wir benutzen nur beschränke Minimierung, beschränke All-Quantifizierung und primitiv rekursive Relationen. Siehe auch Übungsblatt 3. Zu beachten ist die Stelligkeit der Relationen kgV' und kgV.

b) Beh.: Relation P mit $P(x)$ gdw. x ist Primzahl ist primitiv rekursiv.

Bew.: Sei $\chi : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ mit

$$\chi(x) = \chi_{=}(\sum_{z=0}^{x} \chi_{|}(z,x), 2)$$

f.a. $x \in \mathbb{N}$.
Da die konstanten Funktionen,$\chi_{=}$ und $\chi_{|}$ in $\mathbb{P}(\mathbb{N})$ liegen und $\mathbb{P}(\mathbb{N})$ abgeschlossen ist bzgl. beschränkter Summation ist auch $\chi \in \mathbb{P}(\mathbb{N})$.
$\chi(0) = \chi(1) = 0$. $\chi(x) = 1$ für $x > 1$ gdw. die Anzahl der Teiler von x in der Menge $\{0, 1, \ldots, x\}$ gleich 2 ist.
$\to\ \chi = \chi_P\ \to\ \chi_P \in \mathbb{P}(\mathbb{N})$.

Alt. Bew.:

$$P(n) \leftrightarrow \forall x \leq n.((x > 1 \wedge x|n) \to x = n)$$

Da wir nur beschränke All-Quantifizierung und primitive Relationen benutzen, ist $P(x)$ ist primitiv rekursiv (Lemma 6.16).

Aufgabe 6.3. *ad (1):*

Seien $f_1, f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch

$$\begin{aligned} f_1(0) &= 1 \\ f_2(0) &= 1 \\ f_1(y+1) &= f_1(y) + f_2(y) \\ f_2(y+1) &= f_1(y) * f_2(y) \end{aligned}$$

Beh.: $f_1, f_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Bew.: (1) Wir definieren $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ durch

$$g(x) = (1,1)$$

und $h : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}^2$ durch

$$h(x_1, x_2, y) = (x_1 + x_2, x_1 \cdot x_2)$$

für alle $x, x_1, x_2, y \in \mathbb{N}$. Da $+, \cdot \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, ist auch $h \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Sei weiter $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ definiert durch

$$\begin{aligned} F(0) &= g(0) \\ F(y+1) &= h(F(y), y) \end{aligned}$$

für alle $y \in \mathbb{N}$. Da die konstanten Funktionen sowie $h \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ folgt mit Lemma 6.32 (simultane Rekursion) $h \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.
(2) Es gilt:

$$\begin{aligned} f_1(y) &= f^{(2)}_{\mathrm{PROJ}(1)}(F(y)) \\ f_2(y) &= f^{(2)}_{\mathrm{PROJ}(2)}(F(y)) \end{aligned}$$

für alle $y \in \mathbb{N}$. Nachweis mit Induktion über $\mathbb{N}$.

$$\begin{array}{lll}
y = 0: & f^{(2)}_{\mathrm{PROJ}(1)}(F(0)) & = 1 = f_1(0) \\
 & f^{(2)}_{\mathrm{PROJ}(2)}(F(0)) & = 1 = f_2(0) \\
y \to y+1: & f^{(2)}_{\mathrm{PROJ}(1)}(F(y+1)) & = f^{(2)}_{\mathrm{PROJ}(1)}(h(F(y), y)) \\
 & & = f^{(2)}_{\mathrm{PROJ}(1)}(f^{(2)}_{\mathrm{PROJ}(1)}(F(y)) + f^{(2)}_{\mathrm{PROJ}(2)}(F(y)), \\
 & & \quad f^{(2)}_{\mathrm{PROJ}(1)}(F(y)) * f^{(2)}_{\mathrm{PROJ}(2)}(F(y))) \\
 & & = f^{(2)}_{\mathrm{PROJ}(1)}(F(y)) + f^{(2)}_{\mathrm{PROJ}(2)}(F(y)) \\
 & & = f_1(y) + f_2(y) \text{ (nach IV)} \\
 & & = f_1(y+1)
\end{array}$$

Analog zeigt man, dass $f_{PROJ(2)}(F(y+1)) = f_2(y+1))$ gilt.
(3) Da $f_{PROJ(k)}$ und $F \in \mathbb{P}(\mathbb{N})$, ist auch $f_1, f_2 \in \mathbb{P}(\mathbb{N})$.

■

ad (2)(a):

Sei $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ mit $g(x) = (1,1)$ und $h : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}^2$ mit $h(y_1, y_2, z) = (y_1 + y_2, y_1)$. Offensichtlich sind g und h primitiv rekursiv. (siehe Def. 6.31)
Mit Lemma 6.32 ist auch
$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ mit

$$f(0) = g(0)$$
$$f(y+1) = h(f(y), y)$$

primitiv rekursiv.
Definiere $F' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch

$$F'(x) = f^{(2)}_{PROJ(2)}(f(x)).$$

Offensichtlich ist F' prim. rek.
Mit Induktion über $\mathbb{N}$ zeigt man, dass $F = F'$ gilt. Der Nachweis wird als Übung empfohlen.

ad (2)(b):

Sei $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $g = \text{first}$, $h : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ mit $h(x, y, z) = y$ und $w : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $w(x) = \text{rest}(x)$ durch

$$f(x, 0) = g(x)$$
$$f(x, y+1) = h(x, f(w(x), y), y)$$

Mit Lemma 6.11 f prim. rekursiv.
Es ist $f = \text{get}$, da:(Induktion über $\mathbb{N}$).
Sei $z \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{lll}
f(z, 0) & = g(z) & = \text{first}(z) \\
f(z, i+1) & = h(z, f(w(z), i), i) & \\
 & = f(w(z), i) & \\
 & \overset{I.V.}{=} \text{get}(\text{rest}(z), i) &
\end{array}$$

Aufgabe 6.4.

ad (1): ad: $f(\overline{x}, b) = \mu y \leq b.\ R\overline{x}y$

Es ist $f(\overline{x}, 0) = 0$

$$f(\overline{x}, b+1) = \begin{cases} f(\overline{x}, b) & Rxf(\overline{x}, b) \\ b+1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Sei $g : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ mit $g(\overline{x}, y) = 0$, $h : \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$ mit

$$h(\overline{x}, y, z) = \begin{cases} y & R\overline{x}y \\ z & \text{sonst} \end{cases}$$

Offensichtlich ist g prim. rek. Mit Lemma 6.45 ist auch h μ-rekursiv.

Es ist

$$f(\overline{x}, 0) = g(\overline{x}, 0)$$
$$f(\overline{x}, b+1) = h(\overline{x}, f(\overline{x}, b), b)$$

Somit ist f μ-rekursiv.

ad: $g(\overline{x}) = \mu y.\ R\overline{x}y$ ... trivial.

ad (2): Sei Rxy : gdw. $\mu^y \geq x$. $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{N}^2$ ist entscheidbar! (warum?) Mit Aufgabenteil (1) folgt: f_n ist μ-rekursiv.

Wir setzen $0^0 := 0$. Dann ist für alle $n \in \mathbb{N}$ $f_n(0) = 0$

$f_0(1) =\uparrow$, $f_{n+1}(1) = 0$.

ad (3): Es ist $(n+2)^x \geq x$ für alle $n, x \in \mathbb{N}$ (Nachweis mit Induktion). Die Definition von g lässt sich somit umschreiben zu

$$g(x, n) = \mu y \leq x.(n+2)^y \geq x$$

Definiere $g' : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ durch

$$g'(n, x, z) = \mu y \leq z.(n+2)^y \geq x$$

Sei weiter $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{N}^3$ definiert durch

$$R\,nxy \Leftrightarrow (n+2)^y \geq x$$

R ist entscheidbar. Mit Aufgabenteil (2) ist g' somit prim. rekursiv.

Es ist $g(x, n) = g'(n, x, x)$

$\to$ g ist prim. rekursiv.

Informationen zur Vorlesung:
http://www-madlener.informatik.uni-kl.de/ag-madlener/teaching/ss2005/gdp/gdp.html