Abstrakte Reduktionssysteme: Begriffswelt

Definition 8.1 $(U, \rightarrow) U \neq \emptyset, \rightarrow$ *Binärrelation heißt Reduktionssystem.*

- *Begriffe:*
- $x \in U$ *reduzibel* gdw $\exists y : x \rightarrow y$
  irreduzibel
- $x \xrightarrow{*} y$ *reflexiv, transitive Hülle,* $x \xrightarrow{+} y$ *transitive Hülle,* $x \xleftrightarrow{*} y$ *reflexive, symmetrische, transitive Hülle. (Analog* $x \xrightarrow{i} y \ldots$*)*
- $x \xrightarrow{*} y$, y *irreduzibel*, *so* y *Normalform für* x.
- $\Delta(x) = \{y \mid x \rightarrow y\}$ *unmittelbare Nachfolger.*
- $\Delta^{+}(x)$ *echte Nachfolger*, $\Delta^{*}(x)$ *Nachfolger.*

Begriffswelt

- $\Lambda(x) = \max\{i \mid \exists y : x \xrightarrow{i} y\}$ Ableitungskomplexität. $\Lambda : U \to \mathbb{N}_\infty$
- $\to$ noethersch (terminierend, erfüllt Kettenbedingung), falls es keine unendliche Kette $x_1 \to x_2 \to x_3 \to \cdots$ gibt.
- $\to$ beschränkt, falls $\Lambda : U \to \mathbb{N}$.
- $\to$ kreisfrei, $\neg\exists x \in U : x \xrightarrow{+} x$
- $\to$ lokal endlich $x \left.\begin{array}{l}\nearrow\\ \to\\ \searrow\end{array}\right\}$,d.h $\Delta(x)$ endlich für alle x.

Begriffswelt

Einfache Zusammenhänge:

- $\rightarrow$ kreisfrei, so $\xrightarrow{*}$ Partialordnung.
- $\rightarrow$ noethersch, so $\rightarrow$ kreisfrei.
- $\rightarrow$ beschränkt, so $\rightarrow$ noethersch.
  aber nicht umgekehrt!
- $\rightarrow \subset \overset{+}{\Rightarrow}, \Rightarrow$ noethersch, so $\rightarrow$ noethersch.

Prinzip der noetherschen Induktion

Definition 8.2 *$\rightarrow$ Relation auf U, P Prädikat auf U. P ist $\rightarrow$-vollständig, falls*

$$\forall x[(\forall y \in \Delta^{+}(x) : P(y)) \supset P(x)]$$

PNI: Ist $\rightarrow$ noethersch und ist P $\rightarrow$-vollständig, so gilt $P(x)$ für alle $x \in U$.

Anwendungen

Lemma 8.1 *$\rightarrow$ noethersch, so hat jedes $x \in U$ mindestens eine NF.* *(weitere Anwendungen Lemma von König)*

Definition 8.3 *Zentrale Eigenschaften:* $(U, \rightarrow)$

- $\rightarrow$ *konfluent* gdw $\xleftarrow{*} \circ \xrightarrow{*} \subset \xrightarrow{*} \circ \xleftarrow{*}$
- $\rightarrow$ *Church-Rosser* gdw $\xleftrightarrow{*} \subset \xrightarrow{*} \circ \xleftarrow{*}$
- $\rightarrow$ *lokal-konfluent* gdw $\longleftarrow \circ \longrightarrow \subset \xrightarrow{*} \circ \xleftarrow{*}$
- $\rightarrow$ *streng-konfluent* gdw $\longleftarrow \circ \longrightarrow \subseteq \xrightarrow{*} \circ \xleftarrow{\leq 1}$
- *Abkürzung: zusammenführbar $\downarrow$:*

$$\downarrow = \xrightarrow{*} \circ \xleftarrow{*}$$

Wichtige Zusammenhänge

Lemma 8.2 $\rightarrow$ *konfluent* gdw $\rightarrow$ *Church-Rosser.*

Satz 8.1 (Newmann Lemma) *Sei* $\rightarrow$ *noethersch, dann* $\rightarrow$ *konfluent* gdw $\rightarrow$ *lokal konfluent.*

Folgerung 8.1 *a)* $\rightarrow$ *konfluent und* $x \xleftrightarrow{*} y$.

- *i)* *Ist* y *irreduzibel, so* $x \xrightarrow{*} y$. *Insbesondere, wenn* x, y *irreduzibel, so* $x = y$.
- *ii)* $x \xleftrightarrow{*} y$ gdw $\Delta^*(x) \cap \Delta^*(y) \neq \varnothing$.
- *iii)* *Hat* x *eine NF, so ist sie eindeutig.*
- *iv)* *Ist* $\rightarrow$ *noethersch, so hat jedes* $x \in U$ *genau eine NF:* *Schreibweise* $x\downarrow$

b) $(U, \rightarrow)$ *hat jedes* $x \in U$ *genau eine NF, so ist* $\rightarrow$ *konfluent, i. Allg. nicht noethersch.*

Konvergente Reduktionssysteme

Definition 8.4 $(U, \rightarrow)$ *konvergent* gdw $\rightarrow$ *noethersch und konfluent.*

Wichtig da: $x \stackrel{*}{\longleftrightarrow} y$ gdw $x\downarrow = y\downarrow$

$\rightarrow$ *effektiv so Entscheidungsverfahren für WP:*

Für Programmierung: $x \stackrel{*}{\longrightarrow} x\downarrow$, $f(t_1, \ldots, t_n) \stackrel{*}{\longrightarrow}$ *„Wert“*

i. Allg. Unentscheidbare Eigenschaften

Terminierung und Konfluenz

Hinreichende Bedingungen/Techniken

Lemma 8.3 $(U, \to)$, $(M, \succ)$, $\succ$ *WF Partialordnung. Gibt es* $\varphi : U \to M$ *mit* $\varphi(x) \succ \varphi(y)$, *falls* $x \to y$, *so ist* $\to$ *noethersch.*

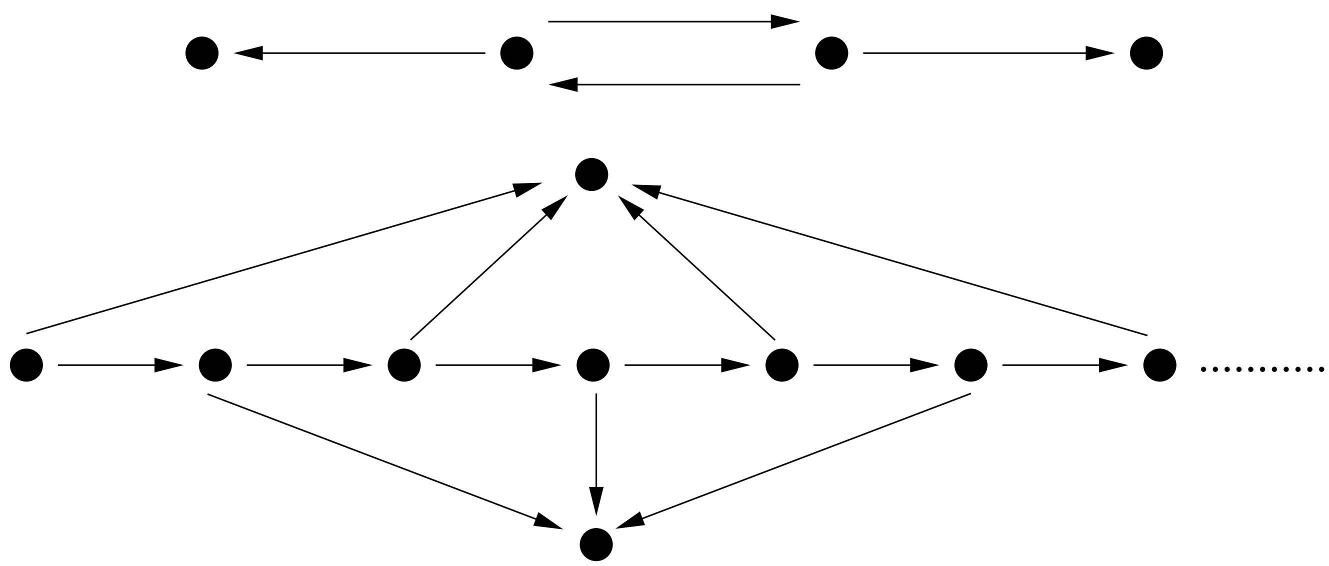
Beispiel 8.1 *Oft* $(\mathbb{N}, >), (\Sigma^*, >)$
$w \in \Sigma^*$, $|w|$ *Länge,* $|w|_a$ *a-Länge* $a \in \Sigma$.
WF-Partialordnungen auf Σ^*

- $x > y \text{ gdw } |x| > |y|$
- $x > y \text{ gdw } |x|_a > |y|_a$
- $x > y \text{ gdw } |x| > |y|,\ |x| = |y| \wedge x \succ_{lex} y$

Beachte reine Lex-Ordnung nicht noethersch.

Hinreichende Bedingung für Konfluenz

Terminierung: Konfluenz gdw lokale Konfluenz
Ohne Terminierung gilt dies nicht!

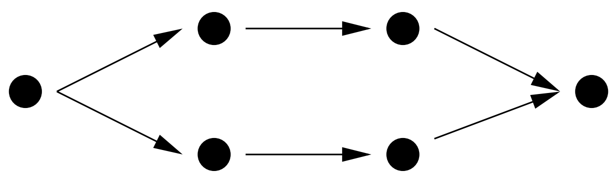


Abschwächung der Terminierung

Satz 8.2 $\rightarrow$ *ist konfluent* gdw *für alle* $u \in U$ *gilt: aus* $u \rightarrow x$ *und* $u \xrightarrow{*} y$ *folgt* $x \downarrow y$.

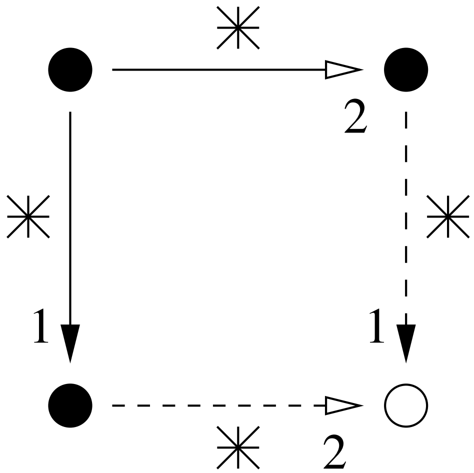
$\triangleright$ *einseitige Lokalisierung der Konfluenz* $\triangleleft$

Satz 8.3 *Ist* $\rightarrow$ *streng konfluent, so ist* $\rightarrow$ *konfluent.*

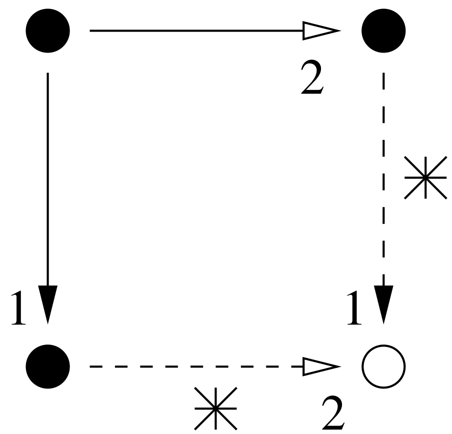


Zusammenhang von Relationen

Definition 8.5 *Zwei Relationen $\rightarrow_1$, $\rightarrow_2$ auf U kommutieren, falls gilt*
${}_1\xleftarrow{*} \circ \xrightarrow{*}_2 \quad \subseteq \quad \xrightarrow{*}_2 \circ {}_1\xleftarrow{*}$.
Sie kommutieren lokal falls gilt ${}_1\leftarrow \circ \rightarrow_2 \quad \subseteq \quad \xrightarrow{*}_2 \circ {}_1\xleftarrow{*}$.



kommutierend



lokal kommutierend

Zusammenhang von Relationen

Lemma 8.4 *Sei* $\rightarrow\; = \;\rightarrow_1 \cup \rightarrow_2$
(1) Kommutieren $\rightarrow_1$ *und* $\rightarrow_2$ *lokal, und ist* $\rightarrow$ *Noethersch, so kommutieren* $\rightarrow_1$ *und* $\rightarrow_2$*.*
(2) Sind $\rightarrow_1$ *und* $\rightarrow_2$ *konfluent und kommutieren, so ist auch* $\rightarrow$ *konfluent.*

Problem: Nicht -Orientierbarkeit:
(a) $x + 0 = x, \;\; x + s(y) = s(x + y)$
(b) $x + y = y + x, \;\; (x + y) + z = x + (y + z)$

$\triangleright$ *Problem: permutative Regeln (b)* $\triangleleft$

Nicht-Orientierbarkeit

Definition 8.6 $(U, \rightarrow, \vdash\!\dashv)$ *mit* $\rightarrow$ *Relation,* $\vdash\!\dashv$ *symmetrische Relation.*

Sei $\models\!\dashv \;=\; \leftrightarrow \cup \vdash\!\dashv$, $\sim \;=\; \overset{*}{\vdash\!\dashv}$, $\approx \;=\; \overset{*}{\models\!\dashv}$,

$\rightarrow_\sim \;=\; \sim \circ \rightarrow \circ \sim$, $\downarrow_\sim \;=\; \overset{*}{\rightarrow} \circ \sim \circ \overset{*}{\leftarrow}$.

Gilt $x \downarrow_\sim y$*, dann heißen* $x, y \in U$ *zusammenführbar modulo* $\sim$.

$\rightarrow$ *heißt Church-Rosser modulo* $\sim$: gdw $\approx \;\subseteq\; \downarrow_\sim$

$\rightarrow$ *heißt lokal konfluent modulo* $\sim$: gdw $\leftarrow \circ \rightarrow \;\subseteq\; \downarrow_\sim$

$\rightarrow$ *heißt lokal kohärent modulo* $\sim$: gdw $\leftarrow \circ \vdash\!\dashv \;\subseteq\; \downarrow_\sim$

Nicht-Orientierbarkeit- Reduktion Modulo $\vdash\dashv$

Satz 8.4 *Sei $\rightarrow_\sim$ terminierend. Dann ist $\rightarrow$ genau dann Church-Rosser modulo $\sim$, wenn $\sim$ lokal konfluent modulo $\sim$ und lokal kohärent modulo $\sim$ ist.*

$$\bullet \longleftarrow \bullet \overset{\vdash\!\!\dashv}{\longleftarrow} \bullet \overset{\vdash\!\!\dashv}{\longrightarrow} \bullet \longrightarrow \bullet$$

Häufigste Anwendung: Modulo AC (Assoziativität + Kommutativität)

Darstellung von Äquivalenzrelationen durch konvergente Reduktionsrelationen

Situation: gegeben: $(U, \vdash\!\dashv)$, gesucht: $(U, \rightarrow)$ mit
(i) $\rightarrow$ konvergent bzgl. Noetherscher PO $>$ auf U und
(ii) $\overset{*}{\leftrightarrow} \ = \ \sim$ mit $\sim \ = \ \overset{*}{\vdash\!\dashv}$

Idee: Approximation von $\rightarrow$ durch Transformationen
$(\vdash\!\dashv, \emptyset) = (\vdash\!\dashv_0, \rightarrow_0) \vdash (\vdash\!\dashv_1, \rightarrow_1) \vdash (\vdash\!\dashv_2, \rightarrow_2) \vdash \ldots$

Invariante im i-ten Schritt:
(i) $\sim \ = \ (\vdash\!\dashv_i \cup \leftrightarrow_i)^*$ und
(ii) $\rightarrow_i \ \subseteq \ >$

Ziel: $\vdash\!\dashv_i = \emptyset$ für ein i und $\rightarrow_i$ konvergent.

Darstellung von Äquivalenzrelationen durch konvergente Reduktionsrelationen

Erlaubte Operationen im i-ten Schritt:

(1) $u \rightarrow_{i+1} v$, falls $u > v$ und $u \vdash\!\dashv_i v$

(2) $u \vdash\!\dashv_{i+1} v$, falls $u \;{}_i\!\leftarrow w \rightarrow_i v$

(3) verkleinere $u \vdash\!\dashv_i v$ zu $u \vdash\!\dashv_{i+1} w$, falls $v \rightarrow_i w$

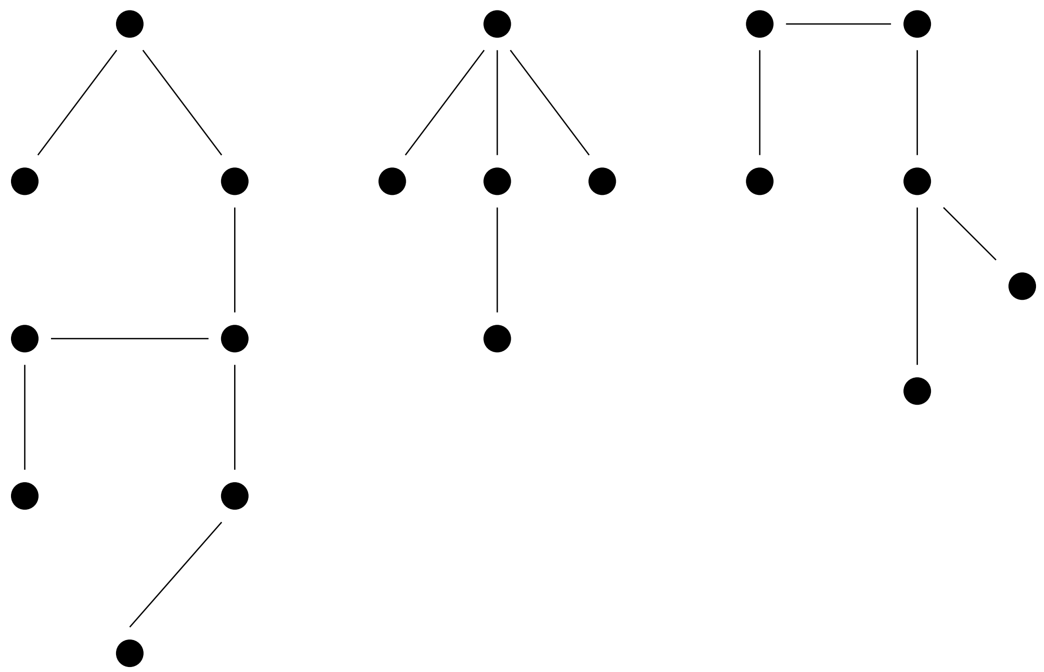
Ziel: Grenzsystem

$$\rightarrow \;=\; \rightarrow_\infty \;=\; \bigcup\{\rightarrow_i \mid i \in \mathbb{N}\} \text{ mit } \vdash\!\dashv_\infty \;=\; \emptyset$$

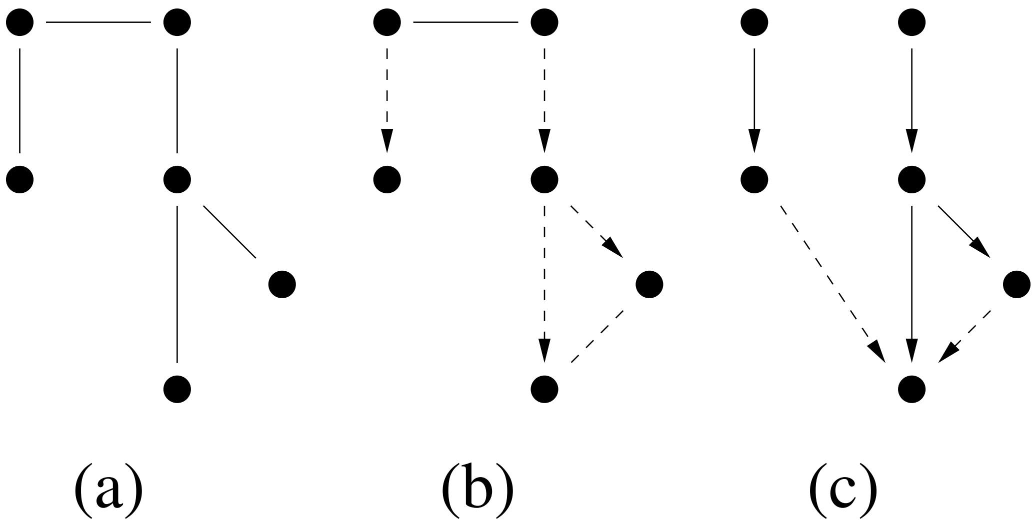
Also:

- $\longrightarrow_\infty \subseteq >$, d. h. noethersch
- $\overset{*}{\longleftrightarrow} = \sim$
- $\longrightarrow_\infty$ konvergent !

Graphische Darstellung einer Äquivalenzrelation



Transformation einer Äquivalenzrelation



Inferenzsystem zur Transformation einer Äquivalenzrelation

Definition 8.7 *Sei $>$ eine Noethersche PO auf U. Das Inferenzsystem $\mathcal{P}$ besteht aus folgenden Regeln:*

(1) *Orientieren*

$$\frac{(\vdash\!\dashv \cup \{u \vdash\!\dashv v\}, \rightarrow)}{(\vdash\!\dashv, \rightarrow \cup \{u \rightarrow v\})} \quad \textit{falls } u > v$$

(2) *Neue Konsequenz einführen*

$$\frac{(\vdash\!\dashv, \rightarrow)}{(\vdash\!\dashv \cup \{u \vdash\!\dashv v\}, \rightarrow)} \quad \textit{falls } u \leftarrow \circ \rightarrow v$$

(3) *Simplifizieren*

$$\frac{(\vdash\!\dashv \cup \{u \vdash\!\dashv v\}, \rightarrow)}{(\vdash\!\dashv \cup \{u \vdash\!\dashv w\}, \rightarrow)} \quad \textit{falls } v \rightarrow w$$

Inferenzsystem (Fort.)

(4) Identitäten entfernen

$$\frac{(\vdash\!\dashv \cup \{u \vdash\!\dashv u\}, \rightarrow)}{(\vdash\!\dashv, \rightarrow)}$$

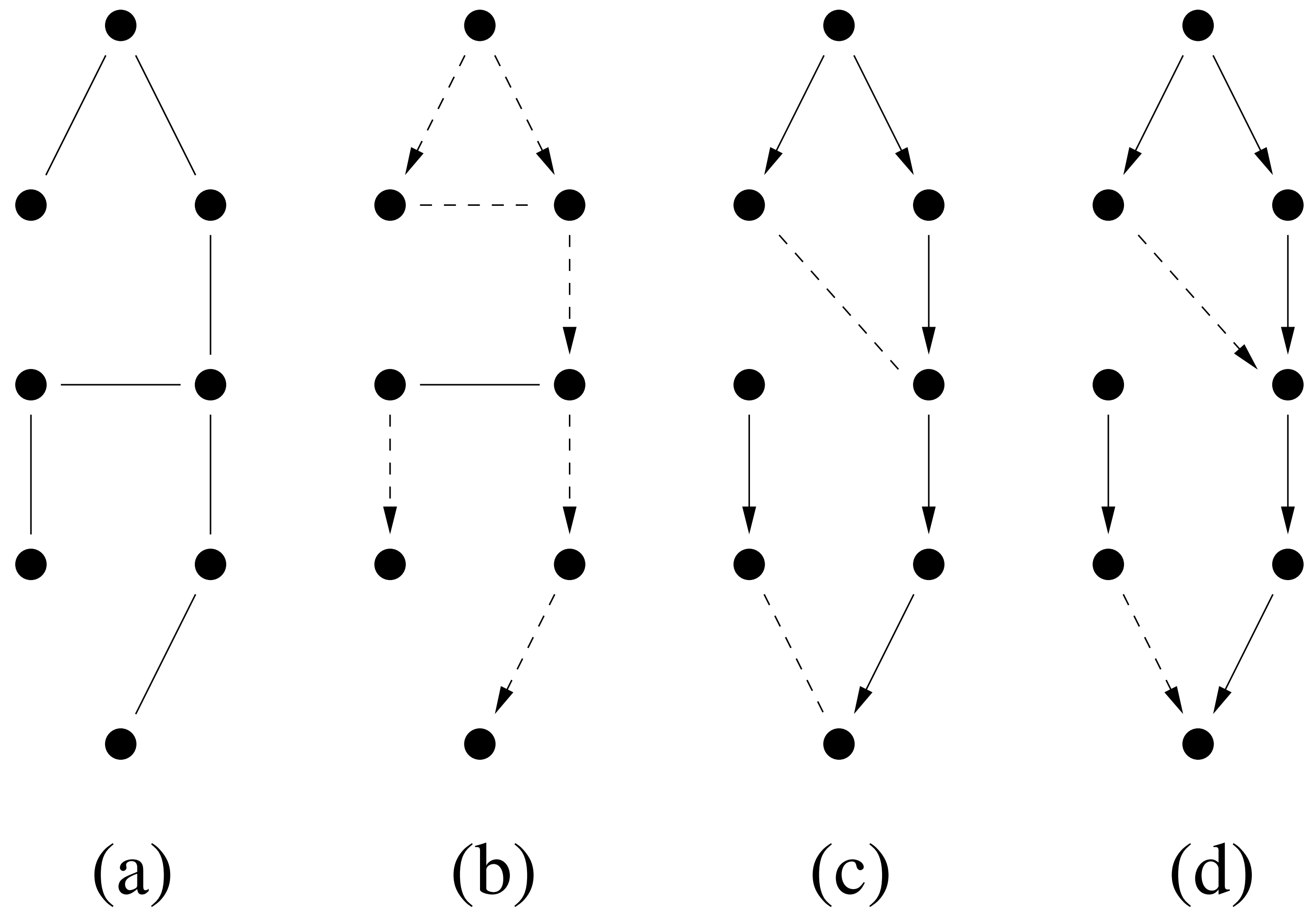
$(\vdash\!\dashv, \rightarrow) \vdash_{\mathcal{P}} (\vdash\!\dashv', \rightarrow')$ falls $(\vdash\!\dashv, \rightarrow)$ mit $\mathcal{P}$ in einem Schritt in $(\vdash\!\dashv', \rightarrow')$ überführt werden kann.

$\vdash^*_{\mathcal{P}}$ Überführungsrelation in endlich vielen Schritten.

Eine Folge $((\vdash\!\dashv_i, \rightarrow_i))_{i\in\mathbb{N}}$ heißt $\mathcal{P}$-*Ableitung*, falls

$(\vdash\!\dashv_i, \rightarrow_i) \vdash_{\mathcal{P}} (\vdash\!\dashv_{i+1}, \rightarrow_{i+1})$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Transformation mit dem Inferenzsystem



Eigenschaften des Inferenzsystems

Lemma 8.5 *Sei* $(\vdash\!\dashv, \to) \vdash_{\mathcal{P}} (\vdash\!\dashv', \to')$

(a) Ist $\to \;\subseteq\; >$*, so gilt auch* $\to' \;\subseteq\; >$

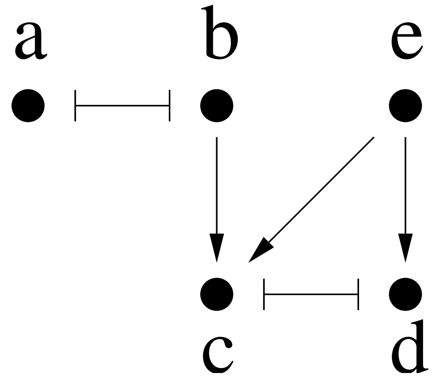
(b) Es gilt $(\vdash\!\dashv \cup \leftrightarrow)^* = (\vdash\!\dashv' \cup \leftrightarrow')^*$

Problem: Wann liefert $\mathcal{P}$ konvergente Reduktionsrelation $\to$?

Idee: Definiere Ordnung $>_{\mathcal{P}}$ auf Äquivalenz-Beweisen, und zeige, daß das Inferenzsystem $\mathcal{P}$ Beweise bzgl. $>_{\mathcal{P}}$ verkleinert! Dabei sollten $\xrightarrow{*} \circ \xleftarrow{*}$ Beweise in der Ordnung minimal sein.

Eigenschaften des Inferenzsystems

Definition 8.8 *Sei* $(\vdash\!\dashv, \to)$ *gegeben und* $>$ *eine Noethersche PO auf* U.
Sei weiter $(\vdash\!\dashv \cup \leftrightarrow)^* \; = \; \sim$.
Ein Beweis für $u \sim v$ *ist eine Folge* $u_0 *_1 u_1 *_2 \cdots *_n u_n$ *mit* $*_i \in \{\vdash\!\dashv, \leftarrow, \to\}$, $u_i \in U$, $u_0 = u$, $u_n = v$ *und für alle* i *gilt* $u_i *_{i+1} u_{i+1}$.
$P(u) = u$ *ist Beweis für* $u \sim u$.
Ein Beweis der Form $u \xrightarrow{*} z \xleftarrow{*} v$ *heißt V-Beweis*.



Beweise für $a \sim e$:

$$P_1(a, e) \; = \; a \vdash\!\dashv b \to c \vdash\!\dashv d \leftarrow e$$
$$P_2(a, e) \; = \; a \vdash\!\dashv b \to c \leftarrow e$$

Beweisordnungen

Beachte: Sind $P_1(u,v)$, $P_2(v,w)$ und $P_3(w,z)$ Beweise, so ist auch $P(u,z) = P_1(u,v)P_2(v,w)P_3(w,z)$ ein Beweis.

Definition 8.9 *Eine Beweisordnung $>_B$ ist eine PO auf der Menge der Beweise, die monoton ist, d.h. $P >_B Q$ für jeden Teilbeweis, und aus $P >_B Q$ folgt $P_1PP_2 >_B P_1QP_2$.*

Lemma 8.6 *Sei $>$ Noethersche PO auf U und $(\vdash\dashv, \rightarrow)$, dann existieren Noethersche Beweisordnungen.*

Beweis: Über Multimengenordnungen.

Multimengenordnung

Instrumentarium: Multimengenordnungen

Objekte: U, $Mult(U)$ Multimengen über U

$A \in Mult(U)$:gdw $A : U \to \mathbb{N}$ mit $\{u \mid A(u) > 0\}$ endlich

Operationen: $\cup, \cap, -$

$$(A \cup B)(u) := A(u) + B(u)$$
$$(A \cap B)(u) := min\{A(u), B(u)\}$$
$$(A - B)(u) := max\{0, A(u) - B(u)\}$$

Multimengenordnung

Definition 8.10 *Erweiterung von $(U, >)$ zu $(Mult(U), \gg)$*
$A \gg B$:gdw es gibt $X, Y \in Mult(U)$ mit $\emptyset \neq X \subseteq A$ und $B = (A - X) \cup Y$, so daß $\forall y \in Y \;\; \exists x \in X \; x > y$

Eigenschaften:

(1) $>$ PO $\rightsquigarrow$ $\gg$ PO
(2) $\{m_1\} \gg \{m_2\}$ gdw $m_1 > m_2$
(3) $>$ total $\rightsquigarrow$ $\gg$ total
(4) $A \gg B \rightsquigarrow A \cup C \gg B \cup C$
(5) $>$ Noethersch gdw $\gg$ Noethersch

Konstruktion der Beweisordnung

Ordne jedem „atomaren“ Beweis eine Komplexität zu

$$c(u * v) = \begin{cases} \{u\} & \text{falls } u \rightarrow v \\ \{v\} & \text{falls } u \leftarrow v \\ \{u, v\} & \text{falls } u \vdash\!\dashv v \end{cases}$$

Erweitere diese Komplexität auf „zusammengesetzte“ Beweise durch

$$c(P(u)) = \emptyset$$
$$c(P(u, v)) = \{c(u_i *_{i+1} u_{i+1}) \mid i = 0, \ldots n - 1\}$$

beachte: $c(P(u, v)) \in Mult(Mult(U))$

Definiere Ordnung auf Beweisen durch
$P >_{\mathcal{P}} Q : \text{gdw } c(P) \ggg c(Q)$

Konstruktion der Beweisordnung

Es gilt: $>_{\mathcal{P}}$ ist Noethersche Beweisordnung!

Welche Beweisschritte sind groß bzw. klein

Betrachte dazu:

(a) $P_1 = x \leftarrow u \rightarrow y$, $P_2 = x \vdash\!\dashv y$

$c(P_1) = \{\{u\}, \{u\}\} \ggg \{\{x, y\}\} = c(P_2)$

$\leadsto P_1 >_{\mathcal{P}} P_2$

analog

(b) $P_1 = x \vdash\!\dashv y$, $P_2 = x \rightarrow y$

(c) $P_1 = u \vdash\!\dashv v$, $P_2 = u \vdash\!\dashv w \leftarrow v$

(d) $P_1 = u \vdash\!\dashv v$, $P_2 = u \rightarrow w \leftarrow v$

Faire Ableitungen in $\mathcal{P}$

Definition 8.11 *Sei $(\vdash\!\dashv_i, \rightarrow_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine $\mathcal{P}$-Ableitung. Setze*

$$\vdash\!\dashv^{\infty} = \bigcup_{i\geq 0} \bigcap_{j\geq i} \vdash\!\dashv_i \text{ und } \rightarrow^{\infty} = \bigcup_{i\geq 0} \rightarrow_i .$$

Die $\mathcal{P}$-Ableitung heißt fair, falls gilt

(1) $\vdash\!\dashv^{\infty} = \emptyset$ und
(2) Ist $x \; {}^{\infty}\!\overset{*}{\leftarrow} \; u \overset{*}{\rightarrow}{}^{\infty} \; y$, dann existiert $k \in \mathbb{N}$ mit $x \vdash\!\dashv_k y$.

Lemma 8.7 *Sei $(\vdash\!\dashv_i, \rightarrow_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine faire $\mathcal{P}$-Ableitung*

(a) Zu jedem Beweis P in $(\vdash\!\dashv_i, \rightarrow_i)$ gibt es einen äquivalenten Beweis P' in $(\vdash\!\dashv_{i+1}, \rightarrow_{i+1})$ mit $P \geq_{\mathcal{P}} P'$.

(b) Sei $i \in \mathbb{N}$ und P Beweis in $(\vdash\!\dashv_i, \rightarrow_i)$, der kein V-Beweis ist. Dann existiert ein $j > i$ und einen zu P äquivalenten Beweis P' in $(\vdash\!\dashv_j, \rightarrow_j)$ mit $P >_{\mathcal{P}} P'$.

Hauptergebniss

Satz 8.5 *Sei* $(\vdash_i, \rightarrow_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *eine faire* $\mathcal{P}$*-Ableitung und* $\rightarrow \;=\; \rightarrow^{\infty}$

(a) Gilt $u \sim v$*, so existiert ein* $i \in \mathbb{N}$ *mit* $u \xrightarrow{*}_i \circ\, {}_i\!\xleftarrow{*} v$

(b) $\rightarrow$ *ist konvergent, und es gilt* $\xleftrightarrow{*} \;=\; \sim$