3 Prädikatenlogik

3.1 Beziehungen zwischen Eigenschaften von Elementen Funktionen, Prädikate

- Beschreibung von Strukturen (Datentypen, Algebren,...)
- Beschreibung von Integritätsbedingungen (Relationen,...)
- Lösbarkeit von Anfragen (Gleichungen,...)

3.1 Beispiel Bereich $\mathbb{Z}$, Operationen, Prädikate,...

- Zahlen: Konstanten: $\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots$
- Individuenvariablen (Abzählb.): $x, y, z, \ldots$
- Funktionszeichen (Operatoren): $+, \cdot, -$ (Stelligkeit 2)
- Prädikatszeichen (Relationen): $<, >$ (Stelligkeit 2)
- Logische Zeichen: $=, \wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \ldots$
- Quantoren: $\forall$ (für alle), $\exists$ (es gibt)
- Trennzeichen: (,), $\cdots$

Beziehungen zwischen Eigenschaften von Elementen Funktionen, Prädikate (Forts.)

Hilberts-10-Problem: Gibt es ein Verfahren, um zu entscheiden, ob eine diophantische Gleichung eine Lösung hat?

- Hat ein Polynom in mehreren Veränderlichen mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ eine Lösung in $\mathbb{Z}$?
  $\exists x, y, z . 3x^2 - 2xy^3 + 5z^3 + 6 = 0$
  Entscheide effektiv, ob eine Aussage in $\mathbb{Z}$ gilt.
- Beschreibung von Eigenschaften:
  $U(x) \equiv \exists z . x = 2z + 1, \quad G(x) \equiv \exists z . x = 2z$
  $\forall x (U(x) \vee G(x))$

Aufbau von Formeln:

Aus Konstanten, Funktionen, Individuenvariablen können **Terme** definiert werden. Terme dienen als Bezeichner für Elemente.

Jede Variable ist Term, jede ganze Zahl ist Term
t_1, t_2 Terme, so auch $(t_1 + t_2), (t_1 - t_2), (t_1 \cdot t_2)$

Atomare Formeln:

t_1, t_2 Terme: So sind $t_1 = t_2, t_1 < t_2, t_1 > t_2$ Atomare Formeln.

A, B Formeln: So sind $(A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), (\neg A)$, und für

x Variable, A Formel: $\forall x . A \quad , \quad \exists x . A$ Formeln.

Interpretationen

Bedeutung von Termen und Formeln. Interpretation:

Hier in $\mathbb{Z}$: Terme klar $+, -, \cdot$ durch die Operatoren auf $\mathbb{Z}$.

Bedeutung von: $(x+5)=y, \forall x (x+5)=0, \exists x (x+5)=0,$ $\forall x \exists y (x+5)=y$

Interpretation: Bereich, Funktionen, Prädikate.
Belegung der Individuen-Variablen.

$x \to 3 \qquad y \to 8$, dann $(x+5)=y$ wahr.

Allgemeinere Formeln: Quantifizierung über Funktionen, Prädikaten.
$A \equiv \exists F((F(a)=b) \wedge \forall x [p(x) \to F(x) = g(x, F(f(x)))]$
wobei F Funktionsvariable, a, b, p Konstanten und f, g Funktionskonstanten sind.

Interpretationen:

1. $D = \mathbb{N} \quad a=0, b=1 \quad f(x) = x \dot{-} 1$
   $g(x,y) = x \cdot y \quad p(x) \equiv x > 0$
   Gibt es eine Funktion $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : F(0) = 1$
   $F(x) = x \cdot F(x \dot{-} 1) \quad (x > 0)$
2. $D = \mathbb{N} \quad a=0, b=1 \quad f(x) = x$
   $g(x,y) = y + 1 \quad p(x) \equiv x > 0$
   Gibt es eine Funktion $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : F(0) = 1$
   $F(x) = F(x) + 1 \quad (x > 0)$

Allgemeine Sprache der Prädikatenlogik zweiter Stufe

3.2 Definition Syntax

a) Alphabet:

1. **Wahrheitswerte:** W, F (Log-Konstanten)
2. **Logische Symbole:**
   - 2.1 **Junktoren:** $\neg, \rightarrow, \wedge, \vee, \leftrightarrow, \cdots$, $\mathbf{If\_ \; Then \; \_ \; Else \; \_}$
   - 2.2 **Operatoren:** $=, \mathbf{if\_ \; then \; \_ \; else \; \_}$
   - 2.3 **Quantoren:** $\forall$ (Allquantor), $\exists$ (Existenzquantor)
3. **Variablensymbole:**
   - 3.1 n-stellige **Funktionsvariablen:** $F_j^n (j \geq 1, n \geq 0)$
     $n = 0$ **Individuenvariablen:** Bezeichnung x_j
   - 3.2 n-stellige **Prädikatenvariablen:** $P_j^n (j \geq 1, n \geq 0)$
     $n = 0$ **aussagenlogische Variablen**
4. **Konstantensymbole:**
   - 4.1 n-stellige **Funktionskonstanten:** $f_j^n (j \geq 1, n \geq 0)$
     f_j^0 **Individuenkonstanten:** Bezeichnung a_j
   - 4.2 n-stellige **Prädikatskonstanten:** $p_j^n (j \geq 1, n \geq 0)$
     p_j^0 **A-log-Konstanten**
5. **Hilfssymbole** (Klammern).

Alle Zeichen verschieden, kein Buchstabe Teilwort eines anderen. Entscheidbare Teilalphabete. Stelligkeiten eindeutig festgelegt. Spezielle Sprachen werden durch Festlegung der Konstanten (oft nur endlich viele) definiert.

Allgemeine Sprache der Prädikatenlogik zweiter Stufe (Forts.)

b) **Ausdrücke: Terme - Formeln**

1. Die Menge $\mathbf{Term}$ der Terme (Bezeichner):
   i. Jede Individuenvariable x_j und Individuenkonstante a_j $(j \geq 1)$ ist ein (atomarer) Term
   ii. Sind $t_1, \ldots, t_n (n \geq 1)$ Terme, so auch $f_j^n(t_1, \ldots, t_n)$ und $F_j^n(t_1, \ldots, t_n)$ $(j \geq 1)$
   iii. Ist A Formel, t_1, t_2 Terme, so auch $(\mathbf{if}\, A \;\mathbf{then}\; t_1 \;\mathbf{else}\; t_2)$
   iv. $\mathbf{Term}$ ist kleinste Menge mit i die Abg. bzg. ii. und iii ist.
2. Die Menge der Formeln $\mathbf{Form}$:
   Atomare Formeln: $\mathbf{AForm}$
   i. $W, F \in \mathbf{AForm}$
   ii. $p_j^0, P_j^0 \in \mathbf{AForm}$ $(j \geq 1)$
   iii. Sind $t_1, \ldots, t_n$ $(n \geq 1)$ Terme, so $p_j^n(t_1, \ldots, t_n), P_j^n(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbf{AForm}$ $(j \geq 1)$
   iv. Sind t_1, t_2 Terme, dann ist $(t_1 = t_2) \in \mathbf{AForm}$
   Formeln: $\mathbf{Form}$
   i. $\mathbf{AForm} \subseteq \mathbf{Form}$
   ii. $A, B, C \in \mathbf{Form}$, so auch
   $(\neg A), (A \rightarrow B), (A \vee B), (A \wedge B), (A \leftrightarrow B)$
   $(\mathbf{If}\, A \;\mathbf{Then}\; B \;\mathbf{Else}\; C) \in \mathbf{Form}$
   iii. Ist v Variable, A Formel
   $((\forall v)A), ((\exists v)A) \in \mathbf{Form}$ (mit Einschränkung)

Allgemeine Sprache der Prädikatenlogik zweiter Stufe (Forts.)

c) **freie (gebundene) Variable.** Geltungsbereich eines Quantors: Ist $B \equiv ((\forall v)A)$ oder $B \equiv ((\exists v)A)$, so ist A der **Geltungsbereich** von $\forall v$ bzw. $\exists v$. Ein Vorkommen von v in A heißt gebunden. Ein **Vorkommen** einer Variablen v in einer Formel heißt gebunden, falls es im Geltungsbereich eines Quantors Qv vorkommt. Sonstige Vorkommen einer Variablen heißen frei. Eine Variable v heißt **freie Variable** einer Formel A, wenn es in A freie Vorkommen von v gibt. Formeln ohne freie Variablen heißen **abgeschlossen** oder **Aussagen.**

d) **Teilterme** und **Teilformeln** werden wie üblich definiert.
Beachte: Jeder Term, Formel wird eindeutig aus den Teiltermen bzw. Teilformeln aufgebaut.

3.3 Bemerkung und Beispiel:

a) $\mathbf{Term}$, $\mathbf{Form}$ sind rekursiv entscheidbar, zusammengesetzte Terme und Formeln lassen sich eindeutig zerlegen. Freie und gebundene Vorkommen lassen sich effektiv bestimmen.

b) **Vereinbarungen**: Stelligkeit aus Kontext
a, b, c Individuenkonstanten, $f, g, h, \dots$ Funktionskonstanten $p, q, r \dots$ Prädikatskonstanten, $x, y, z \dots$ Individuenvariablen $F, G, H, \dots$ Funktionsvariablen $P, Q, R, \dots$ Prädikatsvariablen, $A, B, C, \dots$ Formeln, t, s Terme. Die Mengen $Var(t)$, $Var(A)$ seien die Variablen, die in t bzw. in A vorkommen.

Beispiel

i) $A \equiv$

$$\exists F\{(\underbrace{F(a)}_{\text{Term}} = \underbrace{b}_{\text{Term}}) \wedge \forall x[p(\underline{x}) \rightarrow (\underline{F(x)} = \underline{g(x, F(f(x)))})]\}$$

Term Term Term Term Term

at-F at.F at.F

Formel

Formel

Formel

Formel

$Var(A) = \{F, x\}$ F kommt $3\times$ vor, gebunden
x kommt $4\times$ vor, gebunden

A abgeschlossene Formel

ii)$A \equiv$

$$\forall P\{\underset{\substack{\uparrow\\ \text{geb.}}}{P}(a) \wedge \forall x[[\underset{\substack{\uparrow\\ \text{geb.}}}{x} \neq a \wedge \underset{\substack{\uparrow\\ \text{geb.}}}{P}(f(\underset{\substack{\uparrow\\ \text{geb.}}}{x}))] \rightarrow \underset{\substack{\uparrow\\ \text{geb.}}}{P}(\underset{\substack{\uparrow\\ \text{geb.}}}{x})]]$$

$$\rightarrow \underset{\substack{\uparrow\\ \text{geb.}}}{P}(\underset{\substack{\uparrow\\ \text{frei}}}{x})\}$$

A ist nicht abgeschlossen, x hat freies Vorkommen d.h. $FVar(A) = \{x\}$.

Eingeschränkte Teilsprachen

Konstanten, Variablen einschränken

1. Allgemeine Sprache der Prädikatenlogik erster Stufe: **PL1**
   Nur Individuenvariablen x_i
   (keine Funktion- und Prädikatsvariablen)

$$x_1 \neq x_2 \wedge \forall x_2(\exists x_3 p(x, f(x_2, x_3)) \rightarrow (p(x_2, x_1) \vee p(x_2, a)))$$

2. Sprache der **Gleichheitslogik**
   Nur Individuenvariablen x_j $(j \geq 1)$, Funktionskonstanten.
   Keine Prädikatskonstanten und Variablen, keine Funktionsvariablen.
   Oft noch eingeschränkt, nur Individuenkonstanten
   reine Gleichheitslogik
   $\mathbf{Term}: x_i, a_i, \mathbf{if}\, A \;\mathbf{then}\; t_1 \;\mathbf{else}\; t_2$
   $\mathbf{AForm}: W, F, t_1 = t_2$

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3(((x_1 = x_2) \wedge (x_2 = a)) \rightarrow (x_1 = a))$$

3. Sprache der **quantifizierten Aussagenlogik**
   Nur aussagenlogische Konstanten $p_j^0 (j \geq 1)$ und aussagenlogische Variablen $P_j^0 (j \geq 1)$ sind zugelassen.
   Keine Terme. Atomare Formeln: aussagenlogische Konstanten und Variablen, W, F, p, P_i.

$$(\forall P_1(P_1 \rightarrow p) \rightarrow \exists P_2(P_2 \rightarrow W))$$

Eingeschränkte Teilsprachen (Forts.)

4. Sprache der **Aussagenlogik**
   Nur aussagenlogische Konstanten $p_j^0 (j \geq 1)$ sind zugelassen.

$$(\mathbf{If} p_1 \ \mathbf{Then} \ p_2 \ \mathbf{Else} \ p_3) \leftrightarrow ((p_1 \rightarrow p_2) \vee (\neg p_1 \rightarrow p_3))$$

5. Sprache der **monadischen Logik (2-Stufe)**
   Individuenvariablen x_i, keine Funktionssymbole.
   Monadische Prädikatsvariablen + Konstanten: p_j^1, P_j^1

$$\forall P \forall x \forall y ((P(x) \rightarrow p(y)) \rightarrow p(x))$$

3.2 Semantik der P-Logik 2-Stufe Interpretationen, Belegungen, Bewertungen

$D \neq \emptyset$, Funktionen $f : D^n \to D$ (totale Funktion),
Prädikate $P \subseteq D^n$ (als Relationen)
oder $P : D^n \to \{W, F\}$
0-stellige Funktionen (Element aus D),
Prädikate (Element aus $\{W, F\}$).

3.4 Definition Interpretationen, Belegungen

Sei $\mathcal{L}$ Sprache der P-Logik 2-Stufe
(festgelegt durch die Menge der Konstantensymbole i. R. endlich).

a) Eine **Interpretation** I für $\mathcal{L}$ ist ein Tripel $I = (D, I_c, I_v)$ mit

- $D \neq \emptyset$ Individuenbereich (Definitionsbereich).

- I_c ist eine Interpretation (Belegung) der Konstanten
  $f^n \in \mathcal{L}$, so $I_c(f^n) : D^n \to D$
  $p^m \in \mathcal{L}$, so $I_c(p^m) \subseteq D^m$(oder $: D^m \to \{W, F\}$)

- I_v ist eine Belegung der Variablen:
  F^n Funktionsvariablen $I_v(F^n) : D^n \to D$ $(n \geq 0)$
  P^m Prädikatsvariablen $I_v(P^m) \subseteq D^m(D^m \to \{W, F\})$

(D, I_c) heißt auch **Relationalstruktur.**
Kommen keine Prädikatskonstanten vor, so **Algebra.**

Interpretationen, Belegungen (Forts.)

b) Fortsetzung von I auf $\mathbf{Term}$, bzw. $\mathbf{Form}$:
$I : \mathbf{Term} \to D \qquad I : \mathbf{Form} \to \mathbb{B}$

i) Bewertung der Terme:
- $I(a_i) = I_c(a_i) \qquad I(x_i) = I_v(x_i)$
- $I(f(t_1, \ldots, t_n)) = I_c(f)(I(t_1), \ldots, I(t_n))$

- $I(F(t_1, \ldots, t_n)) = I_v(F)(I(t_1), \ldots, I(t_n))$
- $I(\mathbf{if}\, A \;\mathbf{then}\; t_1 \;\mathbf{else}\; t_2) = \begin{cases} I(t_1) & \text{falls } I(A) = 1 \;\; (W) \\ I(t_2) & \text{falls } I(A) = 0 \;\; (F) \end{cases}$

ii) Bewertung der Formeln

- $I(W) = 1$ $I(F) = 0$ $I(p^0) = I_c(p^0)$ $I(P^0) = I_v(P^0)$
- $I(p(t_1, \ldots, t_n)) = I_c(p)(I(t_1), \ldots, I(t_n))$
- $I(P(t_1, \ldots, t_n)) = I_v(P)(I(t_1), \ldots, I(t_n))$
- $I(t_1 = t_2) = \begin{cases} 1 & \text{falls } I(t_1) =_D I(t_2) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
- $I(\neg A)$, $I(A \wedge B)$, $I(A \vee B)$, $I(A \to B)$, $I(A \leftrightarrow B)$, $I(\mathbf{If}\, A \;\mathbf{Then}\; B \;\mathbf{Else}\; C)$
  Wie in A-Logik.

Interpretationen, Belegungen (Forts.)

- $I(\forall x A) = \begin{cases} 1 & \text{falls für alle } d \in D \text{ gilt } I^{x,d}(A) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
- $I(\exists x A) = \begin{cases} 1 & \text{falls es } d \in D \text{ gibt mit } I^{x,d}(A) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

  $I^{x,d} = (D, I_c, I'_v), \qquad I'_v(y) = \begin{cases} d & y \equiv x \\ I_v(y) & \text{sonst} \end{cases}$
- Entsprechend für Quantifizierungen mit den anderen Funktions- und Prädikatsvariablen.

Jede Interpretation $I = (D, I_c, I_v)$ induziert durch i) und ii) eine Bewertung aller Terme und Formeln, die die bewerteten Konstanten und Variablen als freie Variablen enthalten. Umgekehrt wird jede Bewertung I, die i) und ii) genügt eindeutig durch eine solche Interpretation induziert.

Beachte 3-Parameter: D, I_c, I_v.

c) Gilt $I(A) = 1$, so ist A wahr in der Interpretation I oder I **erfüllt** A.

Schreibweise $\models_I A$ oder $I \models A$

(Beachte A ist hier eine beliebige Formel, kann also freie Variablen enthalten).

Folgerungen

3.5 Bemerkung und Beispiel

Um die Bewertung einer Formel A zu bestimmen, genügt es die Bewertung der in ihr vorkommenden Konstanten und frei vorkommenden Variablen zu kennen!!

$I = (\underline{D}, \underline{I_c}, I_v)$

Insbesondere: Ist A abgeschlossen, so genügt es Interpretationen der Form (D, I_c), d. h. Definitionsbereich und Belegung der Konstanten zu betrachten.

Seien I_1, I_2 Interpretationen mit $D_1 = D_2$ und A eine Formel. Stimmen I_1 und I_2 auf allen Konstanten und freien Variablen, die in A vorkommen, überein, so gilt $I_1(A) = I_2(A)$.

Beispiele:

i) $\exists x \forall y (p(y) \to x = y)$
Stimmt in allen Interpretationen für die $I(p)$ höchstens ein Element enthält. „Es gibt höchstens ein x, so dass $p(x)$ wahr ist".

ii) „Es gibt genau ein x, so dass $p(x)$ wahr ist".
$\exists x[p(x) \land \forall y[p(y) \to x = y]]$

iii) $\forall z \exists u \exists v((z = u \lor z = v) \land u \neq v)$
$\land \forall x \forall y \forall P[x \neq y \lor P(x,x) \lor \neg P(y,y)]$
Wahr in jeder Interpretation mit $|D| \geq 2$
Falsch in jeder Interpretation mit $|D| = 1$

Beispiel (Forts.)

iv) Eigenschaften von Relationen: Reflex., Sym., Tra.
$\forall x\ p(x,x), \forall x \forall y (p(x,y) \to p(y,x))$
$\forall x \forall y \forall z [(p(x,y) \land p(y,z)) \to p(x,z)]$

v) Relationen, Funktionen
$A \equiv \forall x\ p(x, f(x))$, $A_1 \equiv p(x, f(x))$
$I = (\mathbb{N}, I_c, I_v)$, $I_c(p) \equiv\ \leq$ -Prädikat, $I_c(f) : n \to n^2$,
$I^{x,n}(A_1)(\equiv n \leq n^2) = 1$

3.6 Definition Sei $\mathcal{L}$ Sprache der P-Logik 2-Stufe

a) $A \in \mathbf{Form}$ heißt **allgemeingültig,** falls $I(A) = 1$ für jede Interpretation I für $\mathcal{L}$.
Schreibweise: $\models A$

b) $A \in \mathbf{Form}$ heißt **erfüllbar,** falls es eine Interpretation I für $\mathcal{L}$ gibt mit $I(A) = 1$. I heißt auch Modell für A (nur für abg. A). Gibt es keine solche Interpretation, so heißt A unerfüllbar.

c) $\Sigma \subseteq \mathbf{Form}$ heißt **erfüllbar,** falls es eine Interpretation I für $\mathcal{L}$ gibt, die alle Formeln von A erfüllt.

3.7 Bemerkung und Beispiel

a) A allgemeingültig gdw $\neg A$ unerfüllbar. Es genügt Interpretationen zu betrachten, die die Konstanten und freien Variablen der Formel A belegen.
- unendlich viele, da $D \neq \emptyset$ beliebig.

Bemerkung und Beispiel

b) Es gibt allgemeingültige Formeln:
Tautologie-Theorem:
Sei $A(p_1, \ldots, p_n)$ eine Formel der Aussagenlogik in A-Variablen $p_1, \ldots, p_n$. A' entstehe aus A durch simultane Ersetzung von p_i durch $B_i \in \mathbf{Form}$. Dann $A' \in \mathbf{Form}$.
Ist A Tautologie, so ist A' allgemeingültig.
(z. B. $A_1 \vee \neg A_1, A_1 \to (A_2 \to A_1) \ldots$)

c) i) $\forall x \forall y \forall P(x \neq y \vee (P(x,x) \vee \neg P(y,y)))$ ist allgemeingültig.
Es genügt Interpretationen mit $I = (D)$ $D \neq \varnothing$ zu betrachten.
$|D| = 1$ ok, $|D| > 1$
$I_v(x, y, P)$, $x \to d_1$, $y \to d_2$
$d_1 \neq d_2$ ok, $d_1 = d_2 \rightsquigarrow I_v(P)(d_1, d_2) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$

ii) $A \equiv \exists P \forall x \exists y (P(x,x) \wedge \neg P(x,y))$
Weder allgemeingültig noch unerfüllbar.
$|D| = 1 \rightsquigarrow I(A) = 0$, $|D| \geq 2 \rightsquigarrow I(A) = 1$

iii) Allgemeingültig sind:
$t = t$, $\forall x A \leftrightarrow \neg \exists x(\neg A)$, $\exists x A \leftrightarrow \neg \forall x(\neg A)$

Bemerkung und Beispiel (Forts.)

d) Eigenschaften von Ordnungsrelationen:

p 2-stellige P-Konstante

$A_1 \equiv \forall x \forall y \forall z((p(x,y) \wedge p(y,z)) \rightarrow p(x,z))$		Tra.
$A_2 \equiv \forall x \forall y(p(x,y) \vee p(y,x) \vee x = y)$		Tricho.t
$A_3 \equiv \forall x \neg p(x,x)$		Antireflex.
$A_4 \equiv \forall x \forall y(p(x,y) \rightarrow \exists z(p(x,z) \wedge p(z,y)))$		dicht
$A_5 \equiv \forall x \exists y\ p(x,y)$	ohne letztes Elem.	
$A_6 \equiv \forall x \exists y\ p(y,x)$	ohne erstes Elem.	

Keine der Formeln ist allgemeingültig! (Überzeugen Sie sich)

Sie sind erfüllbar:

$I_1 = (\{0,1,2\}, <)$
$I_2 = (\mathbb{N}, <)$
$I_3 = ([0,1], <)$
$I_4 = (\mathbb{Q}, <)$

$<$	0	1	2
0	F	W	W
1	F	F	W
2	F	F	F

e)

Allgemeingültige Formeln	Nicht-Allgemeingültige Formeln
$\forall x p(x) \to \exists x p(x)$	$\exists x p(x) \to \forall x p(x)$
$p(x) \to p(x)$	$p(x) \to p(a)$
$\forall x q(x) \to q(a)$	$q(a) \to \forall x q(x)$
$p(a) \to \exists x p(x)$	$\exists x p(x) \to p(a)$
$\forall x \forall y (p_1(x, y) \to p_1(x, y))$	$\forall x \forall y (p_1(x, y) \to p_1(y, x))$
$\exists y \forall x p_1(x, y) \to \forall x \exists y p_1(x, y)$	$\forall x \exists y p_1(x, y) \to \exists y \forall x p_1(x, y)$
$(\forall x p(x) \vee \forall x q(x)) \to \forall x (p(x) \vee q(x))$	$\forall x (p(x) \vee q(x)) \to \forall x p(x) \vee \forall x q(x)$
Zeige $\neg A$ unerfüllbar	Zeige $\neg A$ erfüllbar $I = (\mathbb{Z}, p(x) \Leftrightarrow x > 0,$ $q(x) : x \leq 0$ $p_1(x, y) : x > y, a \leftarrow 0,$ $x \leftarrow 1)$

Bemerkung und Beispiel (Forts.)

f) Die Sprache der Arithmetik $\mathbb{N}$:
Konstanten: $0, S, +, \cdot,$ $\quad I = (\mathbb{N}, 0,', +, \cdot)(n' = n + 1)$
Stelligkeiten $0, 1, 2, 2$

1. $\forall x \forall y (S(x) = S(y) \rightarrow x = y)$
2. $\forall x \quad S(x) \neq 0$
3. $\forall x \quad x + 0 = x$
4. $\forall x \forall y (x + S(y)) = S(x + y)$
5. $\forall x \quad x \cdot 0 = 0$
6. $\forall x \forall y \quad x \cdot S(y) = (x \cdot y) + x$
7. $\forall P[(P(0) \wedge \forall x(P(x) \rightarrow P(S(x)))) \rightarrow \forall x P(x)]$

Sind gültig in I.
Man beachte 7. ist Induktionsprinzip für Teilmengen von $\mathbb{N}$. Es ist eine Formel der P-Logik 2-Stufe.

Frage nach der **Axiomatisierung** der Arithmetik.

Ist die Allgemeingültigkeit für Formeln einer Sprache $\mathcal{L}$ entscheidbar?
Rekursiv aufzählbar?
Welche effektiven Methoden gibt es?