

## Übungen zur Vorlesung

## Logik

**23. Aufgabe:**

1. Definieren Sie eine Interpretation  $I = (\mathbb{Q}, I_c, I_v)$ , so dass man mit den prädikatenlogischen Formeln über rationale Zahlen reden kann. Welche Schwierigkeiten treten auf? Achten Sie darauf, dass Aufgabe 24 zu Ihrer Definition passt.
2. Definieren Sie eine Interpretation  $I = (\mathbb{R}, I_c, I_v)$ , so dass man mit den prädikatenlogischen Formeln über reelle Zahlen reden kann. Welche Schwierigkeiten treten auf?

**24. Aufgabe:**

1. Werten Sie mit der Interpretation aus Aufgabe 23.1 folgende Terme aus:
  - (a) 42,
  - (b)  $((7 - 3)/2) + 19$  und
  - (c)  $f(\frac{1}{2} * \frac{1}{2})$ .Dabei sind 42, 7, 3, 2, 19 und  $\frac{1}{2}$  Individuenkonstanten und  $-$ ,  $+$ ,  $*$  / und  $f$  Funktionskonstanten.
2. Gelten folgende Formeln in der Interpretation aus Aufgabe 23.1?
  - (a)  $(7 + 9)/3 = 2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2}$ ,
  - (b)  $\forall x \exists y x < y$ ,
  - (c)  $\exists x \exists y \exists z x * x + y * y = z * z$ ,
  - (d)  $\forall Q \exists x \forall y (Q(y) \rightarrow y < x)$ ,
  - (e)  $\forall x \exists y x * y = 1$  und
  - (f)  $\forall x \forall y \exists z (x < z \wedge z < y)$ .

Weitere Individuenkonstanten sind 9,  $2\frac{1}{2}$ ,  $3\frac{1}{2}$ , 1 und  $<$  ist eine zweistellige Prädikatskonstante.

**25. Aufgabe:** Finden Sie eine Formel der Prädikatenlogik, die “Es gibt (mindestens) drei verschiedene  $x$ , so dass  $p(x)$  wahr ist” ausdrückt.

**26. Aufgabe:** Definieren Sie eine Interpretation  $I$ , in der folgende Formeln gelten:

1.  $\exists x \forall y y + x = 0$ ,
2.  $\forall x \forall y \forall z x + (y + z) = (x + y) + z$ ,
3.  $\forall x \forall y (x + y = y + x) \rightarrow x = y$  und
4.  $\exists x x + 5 < x$ .

Hier sind 0 und 5 Individuenkonstanten, + ist eine zweistellige Funktionskonstante und < ist eine zweistellige Prädikatskonstante.

**27. Aufgabe:** Welche der folgenden prädikatenlogischen Formeln sind allgemeingültig?

1.  $(x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z$ ,
2.  $(x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z$ ,
3.  $\forall Q Q(x) \rightarrow \neg x = x$ ,
4.  $(p(x) \rightarrow q(x)) \rightarrow \forall x (p(x) \rightarrow q(x))$  und
5.  $\exists x (p(x) \rightarrow \forall y p(y))$ .