

Übungen zur Vorlesung

Logik

Prof. Dr. Klaus Madlener

Blatt 1

1. Aufgabe: [Beziehung zwischen umgangssprachlicher und formaler Logik]
Versuchen Sie folgende umgangssprachliche Aussagen in Formeln der Aussagenlogik zu übertragen.

1. "Menschen atmen Luft."
2. "Wer Banknoten nachmacht oder verfälscht oder nachgemachte oder verfälschte sich verschafft und in Verkehr bringt, wird mit Freiheitsstrafe nicht unter zwei Jahren bestraft."
3. "In England regnet es oft, weil England eine Insel ist."
4. "Wenn Roland Süßigkeiten isst, wird er dick."
5. "William Shakespeare schrieb 'Moby Dick' und Paris ist die Hauptstadt von Spanien oder Katzen jagen Mäuse."
6. "Dieser Satz hat fünf Wörter und übermorgen ist Mittwoch."

Welche dieser Aussagen sind "wahr", welche "falsch"? Diskutieren Sie kurz die auftretenden Probleme.

Beispiel: Um die Aussage "Wenn ich nicht zuhause bin, kannst du mich über Mobilfunk erreichen." zu formalisieren, kann man zwei Atome

- $A \equiv$ "Ich bin zuhause." und
- $B \equiv$ "Du kannst mich über Mobilfunk erreichen."

definieren. Die obige Aussage lässt sich dann durch die Formel $(\neg A) \rightarrow B$ repräsentieren. Diese Aussage ist falsch. (Wer ist mit "Ich" und "Du" gemeint?)

2. Aufgabe: [Beziehung zwischen umgangssprachlicher und formaler Logik]
"Worin besteht das Geheimnis Ihres langen Lebens?" wurde ein 100-jähriger gefragt. "Ich halte mich streng an die folgenden Diätregeln: Wenn ich kein Bier zu der Mahlzeit trinke, dann habe ich immer Fisch. Immer wenn ich Fisch und Bier zusammen habe, verzichte ich auf Eiscreme. Wenn ich Eiscreme habe

oder Bier meide, rühre ich Fisch nicht an.”, antwortete er. Der Fragesteller fand diesen Ratschlag ziemlich verwirrend.

Formalisieren Sie den Diätplan mit Aussageformen und versuchen Sie eine weniger verwirrende Formulierung zu finden.

3. Aufgabe: [strukturelle Induktion] Beweisen Sie folgende Sätze aus der Vorlesung mit struktureller Induktion über den Aufbau der Aussageformen:

1. Für $A \in F$ gilt: A ist atomar oder beginnt mit “(” und endet mit “)”.
2. Sei $f(A, i)$ die Anzahl der “(” minus der Anzahl der “)” in den ersten i Buchstaben von $A \in F$. Dann gilt $f(A, i) > 0$ für $1 \leq i < |A|$ und $f(A, i) = 0$ für $i = |A|$.

4. Aufgabe: [Eindeutigkeitssatz] In der Vorlesung wurde der Eindeutigkeitssatz bewiesen. Im Beweis spielten die Klammern in den Formeln eine entscheidende Rolle. Betrachte nun die Menge F' , mit

1. $V \subseteq F'$,
2. falls $A, B \in F'$, dann $(A), \neg A, A \wedge B, A \vee B, A \rightarrow B \in F'$ und
3. F' ist die kleinste Menge von Elementen aus Σ^* , die V enthält und 2. erfüllt.

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Behauptung: Für die Menge F' gilt der Eindeutigkeitssatz entsprechend, d.h. jede Formel $A \in F'$ ist entweder atomar oder sie lässt sich eindeutig darstellen als $A \equiv (A_1)$ oder $A \equiv \neg A_1$ oder $A \equiv A_1 \star A_2$ mit $\star \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$ und $A_1, A_2 \in F'$.