Charakterisierungssatz

7.42 Satz

Die kontextfreien Sprachen sind genau diejenigen, die durch einen Kellerautomaten akzeptiert werden.

Beweis: „$\curvearrowright$“ LL-Automat.

„$\curvearrowleft$“ Sei K ein Kellerautomat. o.B.d.A. Finalzustand nur ein Zustand $f \in Q$.

Definiere eine kontextfreie Grammatik G mit nichtterminalen
$N_G = \{[xq, q'] : x \in \Gamma, q, q' \in Q\}$,
Startzustand $Z = [iq_0, f]$,
Terminalsymbolen Σ und Produktionen

$$[xq, q'] \to a[x_m q_m, q_{m-1}][x_{m-1}q_{m-1}, q_{m-2}] \cdots [x_2 q_2, q_1][x_1 q, q']$$

Für jeden Befehl $xqa \to x_1 \cdots x_m q_m$, $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ und alle $q_1, \ldots, q_{m-1}, q' \in Q$.

Es gilt für $x \in \Gamma, q, q' \in Q$ und $w \in \Sigma^*$

$$(*) \qquad xqw \underset{K}{\vdash} q' \text{ gdw } [xq, q'] \underset{G}{\vdash} w$$

Insbesondere erzeugt also G, die von K akzeptierte Sprache.

Beweis von $(*)$:

Es gelte $[xq, q'] \underset{G}{\vdash} w$. Durch Induktion über die Länge einer Ableitung in G zeige im Kellerautomaten gilt $xqw \underset{K}{\vdash} q'$.

Charakterisierungssatz (Forts.)

Erster Ableitungsschritt

$$[xq, q'] \overset{1}{\underset{G}{\vdash}} a[x_m q_m, q_{m-1}][x_{m-1} q_{m-1}, q_{m-2}] \cdots$$
$$[x_2 q_2, q_1][x_1 q_1, q'] \underset{G}{\vdash} w$$

mit $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$. Somit ist w zerlegbar in Teilwörter $aw_m \ldots w_1$ mit der Eigenschaft $[x_i q_i, q_{i-1}] \underset{G}{\vdash} w_i$.

Für $1 < i \leq m$ und $[x_1 q_1, q'] \underset{G}{\vdash} w_1$.

Nach Induktion vor folgt $x_i q_i w_i \underset{K}{\vdash} q_{i-1}$ für $1 < i \leq m$ und $x_1 q_1 w_1 \underset{K}{\vdash} q'$.

Da es die Regel $xqa \longrightarrow x_1 \cdots x_m q_m$ im Kellerautomaten gibt, erhält man die Ableitung:

$$\begin{aligned}
xqw = xqaw_m \ldots w_1 \quad & \underset{K}{\vdash} x_1 \cdots x_{m-1} x_m q_m w_m w_{m-1} \cdots w_1 \\
& \underset{K}{\vdash} x_1 \cdots x_{m-1} q_{m-1} w_{m-1} \cdots w_1 \\
& \underset{K}{\vdash} x_1 \cdots q_{m-2} \cdots w_1 \\
& \ldots \\
& \underset{K}{\vdash} x_1 q_1 w_1 \\
& \underset{K}{\vdash} q'
\end{aligned}$$

Charakterisierungssatz (Forts.)

Es gelte umgekehrt $xqw \underset{K}{\vdash} q'$. Induktiv über die Länge einer Ableitung im Kellerautomaten zeigt man nun $[xq, q'] \underset{G}{\vdash} w$.

Betrachte ersten Schritt:

$xqw \overset{1}{\underset{K}{\vdash}} x_1 \cdots x_m q_m v \underset{K}{\vdash} q'$

mit $w = av$, $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$. Zerlege die Ableitung von $x_1 \cdots x_m q_m v$ nach q' in m-Phasen, die dadurch definiert sind, dass nach der i-ten Phase im Keller nur noch die Zeichen $x_1 \cdots x_{m-i}$ verbleiben. (Da Keller leer gemacht werden muss). Die Ableitung hat somit die Form

$$\begin{aligned}
xqw \quad & \overset{1}{\underset{K}{\vdash}} x_1 \cdots x_m q_m v = x_1 \cdots x_m q_m w_m \cdots w_1 \\
& \underset{K}{\vdash} x_1 \cdots x_{m-1} q_{m-1} w_{m-1} \cdots w_1 \\
& \underset{K}{\vdash} x_1 \cdots q_{m-2} \cdots w_1 \\
& \cdots \\
& \underset{K}{\vdash} x_1 q_1 w_1 \\
& \underset{K}{\vdash} q'
\end{aligned}$$

und es gilt $x_i q_i w_i \underset{K}{\vdash} q_{i-1}$ für $1 < i \leq m$, $x_1 q_1 w_1 \underset{K}{\vdash} q'$. Ind.vor $\rightsquigarrow$ $[x_i q_i, q_{i-1}] \underset{G}{\vdash} w_i$, $K_i \leq m$ und $[x_1 q_1, q'] \underset{G}{\vdash} w_1$,

also $[xq, q'] \overset{1}{\underset{G}{\vdash}} a[x_m q_m, q_{m-1}] \cdots [x_1 q_1, q'] \underset{G}{\vdash} a w_m \cdots w_1 = av = w$.

Abschlusseigenschaften

7.43 Lemma

Der Durchschnitt einer kontextfreien Sprache mit einer rechts-linearen Sprache ist eine kontextfreie Sprache.

Beweis: Idee: Lasse gleichzeitig Kellerautomat und endlicher Automat ablaufen.

Sei K mit Produktionen der Form

$$xq_Ka \rightarrow x'q'_K \text{ bzw. } yq_K \rightarrow y'q'_K$$

und A DEA mit Produktionen

$$q_Aa \rightarrow q'_A(:= \delta(q_A, a))$$

Bilde Produktautomat $[K, A]$, d. h. $Q = [Q_K, Q_A] \ni [q_K, q_A]$ als Kellerautomat mit Produktionen
$x[q_K, q_A]a \rightarrow x'[q'_K, \delta(q_A, a)]$
bzw.
$y[q_K, q_A] \rightarrow y'[q'_K, q_A]$
Startzustand $[i_K, i_A]$, d. h. $i(x) = i[q_{0_K}, q_{0_A}]x$ für x Eingabewort.

Finalzustände $[f_K, f_A]$ $f_K \in$ Finalzustand von K, $f_A \in$ Finalzustand von A.

Abschlusseigenschaften (Forts.)

Es gilt

$$\begin{aligned} w \in L(K) \cap L(A) \ \text{gdw}\ & \exists f_K \in F_K\ i_K {q_0}_K w \underset{K}{\vdash} f_K \wedge \\ & \exists f_A \in F_A\ {q_0}_A w \underset{A}{\vdash} f_A \\ \text{gdw}\ & \exists [f_K, f_A] \in F_K \times F_A : \\ & i_K[{q_0}_K, {q_0}_A]w \underset{[K,A]}{\vdash} [f_K, f_A] \\ \text{gdw}\ & w \in L([K, A]) \end{aligned}$$

7.44 Beispiel

$L = \{ww : w \in \{a, b\}^*\}$ ist keine kontextfreie Sprache.

Sei $R = a^+b^+a^+b^+$ rechts-lineare Sprache (warum?)

$L \cap R = \{a^ib^ja^ib^j : i \geq 1, j \geq 1\}$ ist keine kontextfreie Sprache.

Angenommen JA: Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen: Sei $n \in \mathbb{N}$ die Konstante für die kontextfreie Sprache $L \cap R$.

Wähle $i = j = n \quad a^nb^na^nb^n \in L \cap R$.

$uvwxy$ Zerlegung: $\underset{|vwx| \leq n}{\longmapsto\!\!\!\!\dashv}\ a^nb^na^nb^n = uvwxy$

$\rightsquigarrow$ Kopplung zwischen $a-$EXP und $b-$EXP kann nicht aufrechterhalten werden $\lightning$

(Frage: Ist L kontext-sensitive Sprache?)

Bemerkumg zu Pumping Lemmata

Beachte Quantoren bei Pumping Lemmata.

$$
\begin{array}{cccccc}
\forall & \exists & \forall & \exists & \forall & uv^iw \in L \\
L \in \mathcal{L}_3 & n \in \mathbb{N} & z \in L & u, v, w \in \Sigma^* & i & \\
 & & |z| \geq n & z = uvw & & \\
 & & & 0 < |v| \leq n & & \\
 & & & & & \\
L \in \mathcal{L}_2 & & & u, v, w, & & \\
 & & & x, y \in \Sigma^* & & uv^iwx^iy \in L \\
 & & & z = uvwxy & & \\
 & & & vx \neq \varepsilon & & \\
 & & & |vwx| \leq n & &
\end{array}
$$

Es gibt schärfere Versionen dieser Lemmata. z. B. $|uv| \leq n$ oder $|vw| \leq n$ für rechts-lineare Sprachen. Odgen's Lemma für kontext-freie Sprachen (Man darf sogar gewisse Buchstaben markieren).