Grundlagen der Programmierung

SS 99
Prof. Dr. K. Madlener
Übungsblatt 8

Aufgabe 8.1. Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und $A = \{a^n b^n : n \in \mathbb{N}\}$.

a) Geben Sie eine Turing-Maschine T an, die A entscheidet. Begründen Sie, dass T tatsächlich die Menge A entscheidet.
b) Beweisen Sie, dass jede Turing-Maschine, die A entscheidet, auf dem Band sowohl nach links als auch nach rechts gehen muss (dabei bleibe die ohnehin notwendige Rückkehr an die Stelle links vom Eingabewort unberücksichtigt).

Aufgabe 8.2. Sei $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet und bezeichne $\rho : \Sigma^* \to \Sigma^*$ die Spiegelungsfunktion auf Σ^*. Geben Sie eine Turing-Maschine T an, die die Funktion ρ berechnet. Begründen Sie, dass T tatsächlich die Funktion ρ berechnet.

Aufgabe 8.3. Sei (Σ, Π) ein Wortersetzungssystem mit $\Sigma = \{a, b\}$ und

$$\Pi = \{ab ::= bbb, bbb ::= ab, bb ::= b, b ::= bb\}.$$

Zeigen Sie, dass die Relation $R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ mit

$R\,x\,y$ genau dann, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $x \vdash_{\Pi}^{n} y$ für alle $x, y \in \Sigma^*$

entscheidbar ist.

Aufgabe 8.4. Aus der Vorlesung kennen Sie das Schema der primitiven Rekursion für Wortfunktionen. Dabei ist Σ ein endliches Alphabet, und es sind $g : (\Sigma^*)^{m+1} \to \Sigma^*$ und $h_a : (\Sigma^*)^{m+2} \to \Sigma^*$ $(a \in \Sigma)$ gegebene Funktionen, und es ist die Funktion $f_\ell : (\Sigma^*)^{m+1} \to \Sigma^*$ definiert durch

$$\begin{aligned} f_\ell(\vec{u}, \epsilon) &= g(\vec{u}, \epsilon) \\ f_\ell(\vec{u}, av) &= h_a(\vec{u}, f(\vec{u}, v), v) \end{aligned}$$

für alle $a \in \Sigma$, $\vec{u} \in (\Sigma^*)^m$ und $v \in \Sigma^*$.

Zeigen Sie folgende Aussage: Sind die Funktionen $g : (\Sigma^*)^{m+1} \to \Sigma^*$ und $h_a : (\Sigma^*)^{m+2} \to \Sigma^*$ $(a \in \Sigma)$ primitiv rekursive Wortfunktionen, so ist auch die Funktion $f_r : (\Sigma^*)^{m+1} \to \Sigma^*$, die durch

$$\begin{aligned} f_r(\vec{u}, \epsilon) &= g(\vec{u}, \epsilon) \\ f_r(\vec{u}, va) &= h_a(\vec{u}, f(\vec{u}, v), v) \end{aligned}$$

für alle $a \in \Sigma$, $\vec{u} \in (\Sigma^*)^m$ und $v \in \Sigma^*$ definiert sei, eine primitiv rekursive Wortfunktion.

Informationen zur Vorlesung:
http://www-madlener.informatik.uni-kl.de/ag-madlener/lectures/gdp/ss99/gdp.html