Grundlagen der Programmierung

SS 99
Prof. Dr. K. Madlener
Übungsblatt 6

Aufgabe 6.1. Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen primitiv rekursiv sind.

1. Fibonacci-Funktion $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $F(0) = 1$, $F(1) = 1$, $F(n+2) = F(n+1) + F(n)$.
2. Folgenzugriffsfunktion $get : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $get(z, 0) = first(z)$, $get(z, i+1) = get(rest(z), i)$ (siehe Vorlesung).

Aufgabe 6.2.

1. Beweisen Sie Lemma 4.2.8 aus dem Buch.
2. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch $f_n(x) = \mu y \,.\, n^y \geq x$. Zeigen Sie, dass f_n für alle $n \in \mathbb{N}$ μ-rekursiv ist. Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist $f_n(0)$ und $f_n(1)$ definiert?
3. Sei $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definiert durch $g(x, n) = \mu y \,.\, (n+2)^y \geq x$. Ist g μ-rekursiv? Ist g primitiv-rekursiv?

Aufgabe 6.3. Sei $A : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ die aus der Vorlesung bekannte Ackermann-Funktion.

a) Zeigen Sie, dass A μ-rekursiv ist. Verwenden Sie dazu keine WHILE-Programme.

b) Zeigen oder widerlegen Sie: Die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = A(x, 0)$ für alle $x \in \mathbb{N}$ ist primitiv rekursiv.

c) Zeigen oder widerlegen Sie: Die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$f(x) = \mu y \,.\, A(y, x) - A(x, y) = 0$$

für alle $x \in \mathbb{N}$ ist primitiv rekursiv ($- : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ ist die nichtnegative Differenz).

Aufgabe 6.4. Sei $\mathcal{REL}_n = \{\chi_Q : Q \text{ ist eine } n\text{-stellige entscheidbare Relation}\}$.

a) Zeigen oder widerlegen Sie, dass es zu jedem n eine 0/1-wertige universelle μ-rekursive Funktion rel_n für $\mathcal{REL}_n$ gibt (d. h. $\mathrm{im}(\mathrm{rel}_n) = \{0, 1\}$ und zu jedem $\chi \in \mathcal{REL}_n$ gibt es ein $p \in \mathbb{N}$ mit $\chi(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{rel}_n(p, x_1, \ldots, x_n)$ für alle $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}$).

b) Zeigen oder widerlegen Sie, dass es zu jedem n eine 0/1-wertige totale universelle μ-rekursive Funktion rel_n für $\mathcal{REL}_n$ gibt.

Informationen zur Vorlesung:
http://www-madlener.informatik.uni-kl.de/ag-madlener/lectures/gdp/ss99/gdp.html