Grundlagen der Programmierung

SS 99
Prof. Dr. K. Madlener
Übungsblatt 5

Aufgabe 5.1. Gegeben sei der primitiv rekursive Ausdruck π

$$\mathrm{REK}(\mathrm{PROJ}(1), \mathrm{KOMP}(\mathrm{SUCC}, \mathrm{PROJ}(2))).$$

Wie wir aus der Vorlesung wissen, repräsentiert π eine Funktion $f_\pi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $f_\pi(x, y) = x + y$ für alle $x, y \in \mathbb{N}$. Welche Funktion $f_\pi : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ repräsentiert π? Beweisen Sie Ihre Behauptung.

Aufgabe 5.2. In der Vorlesung wurde als Methode, um Funktionen zu definieren, die beschränkte Minimierung eingeführt: Für eine Relation $R \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$ definiert man $f : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ durch (Kurzschreibweise) $f(\vec{x}, b) = \mu y \leq b.R\vec{x}y$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{N}^n$ und $y \in \mathbb{N}$.

Wir verwendeten in der Vorlesung diese Schreibweise etwas lax bei folgender Definition:

$$f(x) = \mu y \leq x.(y \cdot y \leq x \wedge (y + 1) \cdot (y + 1) > x)$$

für alle $x \in \mathbb{N}$ (dies ist die Definition des ganzzahligen Anteils der Quadratwurzel von x). Worin besteht die Ungenauigkeit obiger Verwendung der beschränkten Minimierung? Erläutern Sie, wie man die beschränkte Minimierung hier korrekterweise verwenden sollte.

Aufgabe 5.3.

a) Zeigen Sie, dass die Funktionen $\max, \min, \mathrm{ggT}, \mathrm{kgV} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ (also Maximum, Minimum, größter gemeinsamer Teiler, kleinstes gemeinsames Vielfaches) in $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ liegen. Geben sie für die Funktionen max und min jeweils einen primitiv rekursiven Ausdruck an, der diese Funktionen repräsentiert.
b) Zeigen Sie, dass die Menge der Primzahlen (d. h. die Relation $P \subseteq \mathbb{N}$ mit $P = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ ist prim}\}$) primitiv rekursiv ist.

Aufgabe 5.4.

a) Seien $f_1, f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch

$$\begin{aligned} f_1(0) &= 1 \\ f_2(0) &= 1 \\ f_1(y+1) &= f_1(y) + f_2(y) \text{ für alle } y \in \mathbb{N} \text{ und} \\ f_2(y+1) &= f_1(y) \cdot f_2(y) \text{ für alle } y \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie: f_1 und f_2 liegen in $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

b) Sei $k \in \mathbb{N}$ und sei $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ primitiv rekursiv. Zeigen Sie, dass dann auch $g : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$, das durch

$$g(\vec{x}, z) = \sum_{y=0}^{z} f(\vec{x}, y) \text{ für alle } \vec{x} \in \mathbb{N}^k \text{ und } y \in \mathbb{N}$$

definiert sei, primitiv rekursiv ist.