# Grundlagen der Programmierung

SS 99
Prof. Dr. K. Madlener
Übungsblatt 4

**Aufgabe 4.1.** Sei $A$ eine Algebra, $\alpha$ ein Programm, $\varphi$ und $\psi$ Formeln und $z$ und $z'$ Zustände über der sich ergebenden Variablenmenge. Zeigen Sie folgende Aussagen:

a) Aus $A \models \{\varphi\}\,\alpha\,\{\psi\}$ und $A \models_z \varphi$ folgt $z \in \mathrm{wlp}_A(\alpha, \psi)$.
b) Aus $A \models \{\varphi\}\,\alpha\,\{\psi\}$ und $z' \in \mathrm{spc}_A(\varphi, \alpha)$ folgt $A \models_{z'} \psi$.
c) Sei $\mathrm{wlp}_A(\alpha, \psi)$ in $A$ durch eine Formel $W_{\alpha,\psi}$ definierbar. Dann gilt die Aussage $A \models \{W_{\alpha,\psi}\}\,\alpha\,\{\psi\}$ und für alle $\xi$ folgt aus $A \models \{\xi\}\,\alpha\,\{\psi\}$ die Aussage $A \models (\xi \to W_{\alpha,\psi})$.
d) Sei $\mathrm{spc}_A(\varphi, \alpha)$ in $A$ durch eine Formel $S_{\varphi,\alpha}$ definierbar. Dann gilt $A \models \{\varphi\}\,\alpha\,\{S_{\varphi,\alpha}\}$ und für alle $\xi$ folgt aus $A \models \{\varphi\}\,\alpha\,\{\xi\}$ die Aussage $A \models S_{\varphi,\alpha} \to \xi$.
e) Sei $\alpha = X := t;$ . Dann ist die stärkste Nachbedingung $\mathrm{spc}_A(\varphi, \alpha)$ von $\alpha$ und $\varphi$ in $A$ durch die Formel $S_{\varphi,\alpha} = \exists Y([\varphi]\{X/Y\} \wedge X = t\{X/Y\})$ definierbar, wobei $Y \notin \mathrm{VAR}(X, t, \varphi)$.

**Aufgabe 4.2.** a) Bestimmen Sie die die Formel $S_{\varphi,\alpha}$ mit $\varphi = X = Y$ und $\alpha = X := X + Y;\ Y := X + Y;$ . Zeigen Sie mit dieser Formel die partielle Korrektheitsaussage $\mathrm{Nat} \models \{X = Y\}\, X := X + Y;\ Y := X + Y;\ \{3 * X = 2 * Y\}$.
b) Für welche Programme $\alpha$ und Formeln $\varphi$ gelten die partiellen Korrektheitsaussagen $\{\varphi\}\,\alpha\,\{\mathrm{FALSE}\}$ bzw. $\{\varphi\}\,\alpha\,\{\mathrm{TRUE}\}$?
c) Sei $A$ eine geeignete Algebra. Seien zwei Programme $\alpha$ und $\beta$ sowie Formeln $\varphi$ und $\psi$ gegeben. Dann gilt

$$\mathrm{wlp}_A(\alpha\beta,\, \psi) = \mathrm{wlp}_A(\alpha, W_{\beta,\psi})$$

sowie

$$\mathrm{spc}_A(\varphi,\, \alpha\beta) = \mathrm{spc}_A(S_{\varphi,\alpha}, \beta),$$

sofern $\mathrm{wlp}_A(\beta, \psi)$ und $\mathrm{spc}_A(\varphi, \alpha)$ durch die Formeln $W_{\beta,\psi}$ bzw. $S_{\varphi,\alpha}$ in $A$ definierbar sind.

**Aufgabe 4.3.** Gegeben sei das folgende Programm $\alpha$

$Y := 0;$
while $\neg(X = Y \vee X = succ(Y))$ do
$\quad Y := succ(succ(Y));$
end;

und die Formel $\psi = \ X = Y$ über der Signatur $(S, \Sigma)$ der Algebra Nat und einer geeignet gewählten Variablenmenge $V$.

1. Bestimmen Sie die schwächste Vorbedingung $\text{wlp}_{\text{Nat}}(\alpha, \psi)$ von $\alpha$ und $\psi$.
2. Geben Sie, falls dies möglich ist, eine Formel $W_{\alpha,\psi}$ an, die $\text{wlp}_{\text{Nat}}(\alpha, \psi)$ in Nat definiert.
3. Zeigen Sie, dass HC(N) nicht vollständig ist. Bearbeiten Sie dazu die Aufgabenteile 1 und 2 mit der Signatur $(S, \Sigma)$ der Algebra N. Ist $\text{wlp}_{\text{N}}(\alpha, \psi)$ in N definierbar (vgl. Vorlesung)?

**Aufgabe 4.4.** Sei $\alpha$ das Programm

call $PRED(X, Z);$

über der Signatur von $N$. Sei weiter $\Omega$ eine Menge von Prozeduren, die wie folgt gegeben ist:

procedure $G($in $X, Y : nat,$ out $Z : nat)$
$\{TRUE\}\ G(X, Y, Z)\ \{X = succ(Y) \wedge Z = Y\}$
begin
$\quad$ if $\neg X = succ(Y)$ then call $G(X, succ(Y), Z);$
$\quad\quad$ else $Z := Y;$ end;
end.

procedure $PRED($in $X : nat,$ out $Z : nat)$
$\{TRUE\}\ PRED(X, Z)\ \{(X = 0 \rightarrow Z = 0) \wedge (\neg X = 0 \rightarrow X = succ(Z))\}$
begin
$\quad$ if $X = 0$ then $Z := 0;$
$\quad\quad$ else call $G(X, 0, Z);$ end;
end.

1. Ist $\Omega$ eine Prozedurumgebung im Sinne von Definition 3.5.3 aus dem Buch?
2. Berechnen Sie $z'$ mit $I^k_{\Omega,\text{N}}(\alpha, z) = (\epsilon, z')$ für ein $k \in \mathbb{N}$, wobei $z : \{X\} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $z(X) = 3$.

Informationen zur Vorlesung:
http://www-madlener.informatik.uni-kl.de/ag-madlener/lectures/gdp/ss99/gdp.html