Grundlagen der Programmierung

SS 99
Prof. Dr. K. Madlener
Übungsblatt 2

Aufgabe 2.1. 1. Sei (S, Σ) die Signatur der Algebra Nat aus dem Buch und die Variablenmenge V mit $V \supseteq \{X, Y, Z : nat\}$ geeignet. Sei weiter die Substitution σ definiert durch $\sigma = \{X/0, Y/succ(Y)\}$. Berechnen Sie
   (a) $(X + 0)\sigma$
   (b) $[\exists X \exists Y \neg X = Y]\sigma$
   (c) $[\exists X X = 0 \wedge Y < X]\sigma$
   (d) $[\forall Y(\exists X X = 0 \wedge Y < X)]\sigma$

2. Seien σ und ρ Substitutionen über der Signatur (S, Σ) und der Variablenmenge V. Zeigen Sie: Es gibt genau eine Substitution γ über (S, Σ) und V, so dass für alle Terme t über (S, Σ) und V folgendes gilt:

$$t\gamma = (t\sigma)\rho$$

Aufgabe 2.2. Bezeichne (S, Σ) die Signatur der Algebra Nat aus dem Buch. Eine *Peano-Struktur* A ist eine (S, Σ)-Algebra, in welcher folgende Formeln gültig sind:

1. $\forall X \neg(0 = succ(X))$
2. $\forall X \forall Y(succ(X) = succ(Y) \rightarrow X = Y)$
3. $\forall X(X + 0 = X)$
4. $\forall X \forall Y(X + succ(Y) = succ(X + Y)$
5. $\forall X(X * 0 = 0)$
6. $\forall X \forall Y(X * succ(Y) = (X * Y) + X)$
7. Für jede Formel φ über (S, Σ) und V das Induktionsprinzip:
   $(([\varphi]\{X/0\} \wedge \forall X(\varphi \rightarrow [\varphi]\{X/succ(X)\})) \rightarrow \forall X \varphi)$

Die oben angegebenen Formeln heißen *Peano-Axiome.* Eine k-stellige Relation R in einer (S, Σ)-Algebra A heißt *definierbar*, wenn eine Variablenmenge V und eine Formel φ über (S, Σ) und V existiert, so dass $(a_1, \ldots, a_k) \in R \Leftrightarrow A \models_{z(X_1/a_1,\ldots,X_k/a_k)} \varphi$ für alle $(a_1, \ldots, a_k) \in R$. Zum Beispiel ist in Nat die Menge der geraden Zahlen definierbar. Betrachte etwa die Variablenmenge $V = \{X, Y : nat\}$ und die Formel $\exists Y X = Y + Y$.

1. Begründen Sie, dass Nat eine Peano-Struktur ist. Gilt in Nat die Formel $\neg(X = Y) \rightarrow X \leq Y$?

2. Geben Sie das Induktionsprinzip für die Formel $\varphi \equiv X = 0 \vee (\exists Y X = succ(Y))$ an.
3. Zeigen Sie, dass die Menge der Primzahlen in Nat definierbar sind. Hinweis: Definieren Sie zuerst die Teilbarkeitsrelation in Nat.
4. Zeigen Sie, dass die Relation des größten gemeinsamen Teilers ggT in Nat definierbar ist, wobei $\mathrm{ggT}(x, y, z) \Leftrightarrow z$ ist der größte gemeinsame Teiler von x und y.

Aufgabe 2.3. Sei α das folgende Programm über einer beliebigen Signatur und einer Variablenmenge, die die paarweise verschiedenen Variablen X, Y und T eines Typs s enthalte:

$$T := X;\ X := Y;\ Y := T;$$

Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

a) $z[\![\alpha]\!]_A z(X/\mathrm{val}_{A,z}(Y), Y/\mathrm{val}_{A,z}(X))$
b) $z[\![\alpha]\!]_A z(X/\mathrm{val}_{A,z}(Y), Y/\mathrm{val}_{A,z}(X), T/\mathrm{val}_{A,z}(X))$,

jeweils für eine beliebige Algebra zur Signatur und einen beliebigen Zustand z.

Aufgabe 2.4. Sei α ein Programm und A eine Algebra zu einer Signatur. Zeigen Sie die Rechtseindeutigkeit der Relation $[\![\alpha]\!]_A$, d. h. gilt für die Zustände z, z' und z'' $z[\![\alpha]\!]_A z'$ und $z[\![\alpha]\!]_A z''$, dann folgt $z' = z''$.

Informationen zur Vorlesung:
http://www-madlener.informatik.uni-kl.de/ag-madlener/lectures/gdp/ss99/gdp.html