Grundlagen der Programmierung

SS 99
Prof. Dr. K. Madlener
Übungsblatt 1

Aufgabe 1.1. Ein *Monoid* $(M, *, 1)$ besteht aus einer nichtleeren Menge M, einer zweistelligen, assoziativen Verknüpfung $* : M \times M \to M$ und einem neutralen Element 1. Sei Σ ein endliches Alphabet und $\cdot : \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^*$ die Wortkonkatenation auf Σ^*. Offensichtlich ist $(\Sigma^*, \cdot, \epsilon)$ ein Monoid; es heißt das *freie Monoid* über Σ und wird im folgenden vereinfachend mit Σ^* bezeichnet. Zeigen Sie die nachfolgenden Aussagen.

1. Prüfen Sie, ob durch $\rho : \Sigma^* \to \Sigma^*, u \mapsto u^{\mathrm{mi}}$ (siehe Buch) ein Endomorphismus, also Homomorphismus von Σ^* auf sich selbst, definiert wird, der jedes Wort u auf sein gespiegeltes Wort u^{mi} abbildet, wobei $\epsilon^{\mathrm{mi}} = \epsilon$ gelten soll. Ist die Abbildung ρ injektiv? Ist die Abbildung ρ surjektiv?
2. Ein Wort $u \in \Sigma^*$ mit der Eigenschaft $u = \rho(u)$ heißt *Palindrom* über Σ. Sei die Menge P der Palindrome über Σ definiert durch $P := \{u \mid u = \rho(u)\}$. Geben Sie einen Kalkül K an, in welchem genau die Menge P ableitbar ist.

Aufgabe 1.2. Sei $\Sigma = \{S, a, b\}$ ein Alphabet und $\Pi = \{S \to aSa, S \to bSb, S \to \epsilon\}$ eine Menge von Produktionen. Die Menge M sei definiert durch $M := \{uS\rho(u) \mid u \in (\Sigma \setminus \{S\})^*\} \cup \{u\rho(u) \mid u \in (\Sigma \setminus \{S\})^*\}$, wobei $\rho : \Sigma^* \to \Sigma^*$ die Spiegelungsfunktion bezeichnet (siehe Aufgabe 1.1). Zeigen Sie in dem durch das Wortersetzungssystem (Σ, Π) definierten Kalkül $K(\Sigma, \Pi)$ die nachfolgenden Aussagen.

1. Jedes Element aus M kann aus dem Wort S abgeleitet werden.
2. Jedes von S ableitbare Wort ist ein Element von M.

Aufgabe 1.3. Sei (S, Σ) die der Algebra Nat (siehe Buch) zu Grunde liegende Signatur.

1. Geben Sie eine Algebra A über (S, Σ) an, in welcher der Grundbereich nat_A endlich ist und die Funktionen $+_A$ und $*_A$ nicht kommutativ sind.
2. Erweitern Sie diese Algebra geeignet, um Felder (arrays) mit Elementen aus dem Grundbereich nat_A beschreiben zu können.

Aufgabe 1.4. Beweisen Sie Lemma 3.2.5 aus dem Buch, d.h. zeigen Sie

1. Für t vom Typ s ist $val_{A,z}(t) \in s_A$.
2. Ist z' ein weiterer Zustand über A und V mit $z(X) = z'(X)$ für alle in t vorkommenden Variablen X, so ist $val_{A,z}(t) = val_{A,z'}(t)$.

Informationen zur Vorlesung:
http://www-madlener.informatik.uni-kl.de/ag-madlener/lectures/gdp/ss99/gdp.html