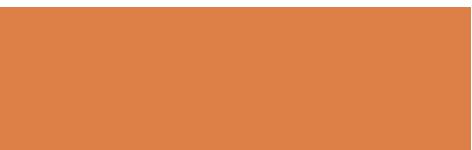


HILBERT CALCULUS EXERCISE SOLUTIONS



Ex 2(a) $\neg \dashv b \rightarrow (a \rightarrow a)$

- $a \rightarrow ((a \rightarrow a) \rightarrow a)$ (A1, P = a , Q = a → a)
- $(a \rightarrow ((a \rightarrow a) \rightarrow a)) \rightarrow ((a \rightarrow (a \rightarrow a)) \rightarrow (a \rightarrow a))$ (A2,
P = a , Q = a → a, R = a)
- $((a \rightarrow (a \rightarrow a)) \rightarrow (a \rightarrow a))$ (MP)
- $a \rightarrow (a \rightarrow a)$ (A1, P = Q = a)
- $a \rightarrow a$ (MP)
- $(a \rightarrow a) \rightarrow (b \rightarrow (a \rightarrow a))$ (A1, P = (a → a) , Q = b)
- $b \rightarrow (a \rightarrow a)$ (MP)

Ex 2(b) $\neg \perp a \vee \neg a = (\neg a \rightarrow \neg a)$

- $\neg a \rightarrow ((\neg a \rightarrow \neg a) \rightarrow \neg a)$ (A1, P = $\neg a$, Q = $\neg a \rightarrow \neg a$)
- $(\neg a \rightarrow ((\neg a \rightarrow \neg a) \rightarrow \neg a)) \rightarrow ((\neg a \rightarrow (\neg a \rightarrow \neg a)) \rightarrow (\neg a \rightarrow \neg a))$ (A2, P = $\neg a$, Q = $\neg a \rightarrow \neg a$, R = $\neg a$)
- $((\neg a \rightarrow (\neg a \rightarrow \neg a)) \rightarrow (\neg a \rightarrow \neg a))$ (MP)
- $\neg a \rightarrow (\neg a \rightarrow \neg a)$ (A1, P = Q = $\neg a$)
- $\neg a \rightarrow \neg a$ (MP)

Ex 2(c) $\neg\neg a \dashv\vdash a$

- $\neg\neg a$ (Assumption)
- $\neg\neg a \rightarrow (\neg\neg\neg a \rightarrow \neg\neg a)$ (A1, P = $\neg\neg a$, Q = $\neg\neg\neg a$)
- $(\neg\neg\neg a \rightarrow \neg\neg a)$ (MP)
- $(\neg\neg\neg a \rightarrow \neg\neg a) \rightarrow (\neg a \rightarrow \neg\neg a)$ (A3, P = $\neg\neg\neg a$, Q= $\neg a$)
- $(\neg a \rightarrow \neg\neg a)$ (MP)
- $(\neg a \rightarrow \neg\neg a) \rightarrow (\neg\neg a \rightarrow a)$ (A3, P = a , Q= $\neg\neg a$)
- $(\neg\neg a \rightarrow a)$ (MP)
- a (MP)