

HILBERT CALCULUS EXERCISE SOLUTIONS



Ex 2(a) $\neg \neg b \rightarrow (a \rightarrow a)$

- $a \rightarrow ((a \rightarrow a) \rightarrow a)$ (A1, $P = a$, $Q = a \rightarrow a$)
- $(a \rightarrow ((a \rightarrow a) \rightarrow a)) \rightarrow ((a \rightarrow (a \rightarrow a)) \rightarrow (a \rightarrow a))$ (A2, $P = a$, $Q = a \rightarrow a$, $R = a$)
- $((a \rightarrow (a \rightarrow a)) \rightarrow (a \rightarrow a))$ (MP)
- $a \rightarrow (a \rightarrow a)$ (A1, $P = Q = a$)
- $a \rightarrow a$ (MP)
- $(a \rightarrow a) \rightarrow (b \rightarrow (a \rightarrow a))$ (A1, $P = (a \rightarrow a)$, $Q = b$)
- $b \rightarrow (a \rightarrow a)$ (MP)

Ex 2(b) $\neg a \vee \neg a = (\neg a \rightarrow \neg a)$

- $\neg a \rightarrow ((\neg a \rightarrow \neg a) \rightarrow \neg a)$ (A1, $P = \neg a$, $Q = \neg a \rightarrow \neg a$)
- $(\neg a \rightarrow ((\neg a \rightarrow \neg a) \rightarrow \neg a)) \rightarrow ((\neg a \rightarrow (\neg a \rightarrow \neg a)) \rightarrow (\neg a \rightarrow \neg a))$ (A2, $P = \neg a$, $Q = \neg a \rightarrow \neg a$, $R = \neg a$)
- $((\neg a \rightarrow (\neg a \rightarrow \neg a)) \rightarrow (\neg a \rightarrow \neg a))$ (MP)
- $\neg a \rightarrow (\neg a \rightarrow \neg a)$ (A1, $P = Q = \neg a$)
- $\neg a \rightarrow \neg a$ (MP)

Ex 2(c) $\neg a \vdash a$

- $\neg a$ (Assumption)
- $a \rightarrow (\neg a \rightarrow a)$ (A1, $P = a$, $Q = \neg a$)
- $(\neg a \rightarrow a)$ (MP)
- $(\neg a \rightarrow a) \rightarrow (a \rightarrow \neg a)$ (A3, $P = \neg a$, $Q = a$)
- $(a \rightarrow \neg a)$ (MP)
- $(a \rightarrow \neg a) \rightarrow (\neg a \rightarrow a)$ (A3, $P = a$, $Q = \neg a$)
- $(\neg a \rightarrow a)$ (MP)
- a (MP)