SS 2009 14. Juni 2009

Übungen zur Vorlesung Logik
Blatt 9

Prof. Dr. Klaus Madlener Abgabe bis 1. Juli 2009 10:00 Uhr

43. Aufgabe: [Tautologien, Übung]
Zeigen Sie, dass die folgenden Formeln Tautologien sind:

$A_1 \equiv (a = 3 \to (q \to \forall y[a = y \to y = 4])) \to ((a = 3 \to q) \to (a = 3 \to \forall y[a = y \to y = 4]))$

$A_2 \equiv \forall z \forall x[p(x)] \to p(f(a, 5))$

$A_3 \equiv \exists P \forall Q[P \to (Q \wedge r) \to P \vee r]$

$a_4 \equiv \exists P[P]$

44. Aufgabe: [Substitution, Übung]

1. Finden Sie eine Formel A, einen Term t und eine Individuenvariable x, so dass die Substitution $A_x[t]$ erlaubt ist, $A_x[t]$ allgemeingültig ist, aber A nicht allgemeingültig ist.
2. Gegeben sei die Substitution σ aus Aufgabe 47. Wenden Sie diese Substitution auf die folgenden Terme und Formeln an:

   $A_1 \equiv (x < 3 \to p(x_1))$
   $A_2 \equiv \exists x[x = 0 \vee P(x_3)]$
   $A_3 \equiv \forall x[\neg x_1 = 0]$
   $A_4 \equiv \forall x_1[\neg x_1 = 0] \to p$

45. Aufgabe: [Semantische Folgerung, Übung]
Es sei $A \in$ Form. Zeigen oder widerlegen Sie:

1. Es gilt $\exists y \forall x\ A \models \forall x \exists y\ A$.
2. $\exists y \forall x\ A$ folgt logisch aus $\forall x \exists y\ A$.
3. Aus $\forall x\ f(x) = g(x)$ folgt $f = g$ logisch.

46. Aufgabe: [Tautologien PL, 5P]
Zeigen Sie, dass die folgenden Formeln Tautologien sind:

$A_1 \equiv \forall x \exists P[P(x) \vee x = f(a)] \to (Q(y, z) \to \forall x \exists P[P(x) \vee x = f(a)])$

$A_2 \equiv \forall x[q(x)] \to q(h(g(a, f(b)), b, f(c)))$

$A_3 \equiv \forall z[\neg(x = f(x) \to p(f(x))) \to (p(f(x)) \to x = f(x))]$

$A_4 \equiv \exists P[P \rightarrow q \vee r]$

47. Aufgabe: [Substitution, 10 P]
Die Substitution σ sei durch

$$\begin{aligned}
\sigma(x_1) &= x + 3 \cdot x \\
\sigma(x_2) &= 3 - (x + x_1) \cdot 2 \\
\sigma(x_3) &= 42 \\
\sigma(x_4) &= f(a, g(b)) \\
\sigma(x_5) &= if\ (x > 3)\ then\ 5\ else\ 3 \\
\sigma(x_6) &= g(y * 2)
\end{aligned}$$

gegeben. Wenden Sie σ auf die folgenden Formeln an. Geben Sie jeweils mit an, ob die Substitution erlaubt ist.

$A_1 \equiv x_1 \geq x_3$

$A_2 \equiv \forall x[x = 42 \rightarrow \neg(x_4 = 3)]$

$A_3 \equiv \exists y[f(y) = 0 \rightarrow \forall x[x \geq x_2]]$

$A_4 \equiv p(x_1) \vee \forall x[x + 3 > x_6]$

$A_5 \equiv \forall x[x_5 = 5 \rightarrow x > 3]$

$A_6 \equiv x_3 < x_4 \vee \forall y[p(y) \vee y = 3]$

$A_7 \equiv \forall x_3[x_3 = 42]$

48. Aufgabe: [wichtige Sätze, 6 P]
Zeigen Sie:

1. $\{\forall x[3 \cdot x > 4], \exists x[p(x)], q(3 + 4)\} \models \forall x[42 > x] \rightarrow \exists x[p(x)]$
2. $\{p(a), p(x + 3) \rightarrow \exists y[y > p(x + 3)], p \vee q, p(x + 3)\} \models \exists y[y > p(x + 3)]$
3. $\{\forall x[3 \cdot x > 4], \exists x[p(x)], q(3 + 4)\} \models \forall y[\forall x[42 > x] \rightarrow \exists x[p(x)]]$
4. $\{\forall x[\neg(p(x) \rightarrow \exists y[q(f(x, x))])]\} \models \neg(\forall y[p(y)] \rightarrow q(f(x, x)))$
5. $\Gamma, A \models \neg B$ gdw. $\Gamma, B \models \neg A$

Hinweis: Benutzen Sie für 5. nicht das Deduktionstheorem und keine Wertetabelle und schreiben Sie nicht „gilt laut Vorlesung“.

Abgabe: bis 1. Juli 2009 10:00 Uhr im Kasten neben Raum 34/401.4

zu **Aufgabe43:**

$A_1 \equiv (a = 3 \to (q \to \forall y[a = y \to y = 4])) \to ((a = 3 \to q) \to (a = 3 \to \forall y[a = y \to y = 4]))$:

Diese Formel entsteht aus $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$, indem p durch $\forall x \exists P[P(x) \vee x = f(a)]$ und q durch $Q(y, z)$ ersetzt wird. Diese Formel ist bekanntermaßen eine Tautologie und nach dem Tautologie-Theorem ist A_1 dann auch eine Tautologie.

$A_2 \equiv \forall z \forall x[p(x)] \to p(f(a, 5))$:

A_2 ist $\forall z \forall x[A] \to A_x[t]$ mit $A \equiv p(x, y)$ und $t \equiv f(a, 5)$, was nach Folgerung 3.18 (Folie 178) allgemeingültig ist.

$A_3 \equiv \exists P \forall Q[P \to (Q \wedge r) \to P \vee r]$:

Hier wenden wir die Quantorenelimination an: Es gilt

$$\begin{aligned}
A_3 \equiv& \exists P \forall Q[P \to (Q \wedge r) \to P \vee r] \\
\models\!\!\!\!\dashv& (\forall Q[W \to (Q \wedge r) \to W \vee r]) \vee (\forall Q[F \to (Q \wedge r) \to F \vee r]) \\
\models\!\!\!\!\dashv& (\forall Q[W \to (Q \wedge r) \to W \vee r]) \vee ((F \to (W \wedge r) \to F \vee r) \wedge (F \to (F \wedge r) \to F \vee r)) \\
\models\!\!\!\!\dashv& (\forall Q[W \to (Q \wedge r) \to W \vee r]) \vee (W \wedge W) \\
\models\!\!\!\!\dashv& (\forall Q[W \to (Q \wedge r) \to W \vee r]) \vee W \\
\models\!\!\!\!\dashv& W.
\end{aligned}$$

W ist eine Tautologie, also muss A_3 ebenfalls eine Tautologie sein.

$a_4 \equiv \exists P[P]$:

Auch hier wenden wir die Quantorenelimination an: Es gilt

$$\begin{aligned}
A_4 \equiv& \exists P[P] \\
\models\!\!\!\!\dashv&\ W \vee F \\
\models\!\!\!\!\dashv&\ W.
\end{aligned}$$

zu **Aufgabe44:**

1. Ein einfaches Beispiel ist $A \equiv x = y$ und $t \equiv y$. Dann ist A natürlich nicht allgemeingültig, aber die Substitution $A_x[t]$ ist erlaubt und $A_x[t] \equiv y = y$ ist allgemeingültig.
2. Gegeben sei die Substitution σ aus Aufgabe 47. Wenden Sie diese Substitution auf die folgenden Terme und Formeln an:

   $A_1 \equiv (x < 3 \to p(x_1))$ • $\sigma(A_1) \equiv (x < 3 \to p(x + 3 \cdot x))$
   - Die Substitution ist erlaubt, weil es keine Quantoren gibt.

   $A_2 \equiv \exists x[x = 0 \vee P(x_3)]$ • $\sigma(A_2) \equiv \exists x[x = 0 \vee P(42)]$
   - Die Substitution ist erlaubt, da x in $\sigma(x_3)$ nicht vorkommt.

   $A_3 \equiv \forall x[\neg x_1 = 0]$ • $\sigma(A_3) \equiv \forall x[\neg x + 3 \cdot x = 0]$
   - Die Substitution ist nicht erlaubt, da x innerhalb des Wirkungsbereichs des Quantors eingefügt wird.

$A_4 \equiv \forall x_1[\neg x_1 = 0] \to p$ • $\sigma(A_4) \equiv \forall x_1[\neg x_1 = 0] \to p$

- Die Substitution ist erlaubt, da sich nichts ändert. Für x_1 muss nichts eingesetzt werden, da x_1 gebunden ist.

zu **Aufgabe45:**

1. $\exists y \forall x\ A \models \forall x \exists y\ A$:
   Diese Aussage ist korrekt. Es sei $I = (D, I_c, I_v)$ eine Interpretation und $I \models \exists y \forall x\ A$. Dann gibt es ein $d \in D$ mit $I^{y,d} \models \forall x\ A$. Also gilt für alle $d' \in D$ $(I^{y,d})^{x,d'} \models A$.

   Ist $x \equiv y$, so ist $(I^{y,d})^{x,d'} = I^{x,d'}$. Es folgt $I^{x,d'} \models A$ für alle $d' \in D$. Insbesondere gilt $I^{x,d} \models A$. Da $x \equiv y$ gilt, folgt (wegen $(I^{x,d'})^{y,d} = I^{x,d}$) auch $(I^{x,d'})^{y,d} \models A$ für alle $d' \in D$.

   Ist dagegen $x \not\equiv y$, so ist $(I^{y,d})^{x,d'} = (I^{x,d'})^{y,d}$ für alle $d' \in D$. Also ist auch hier für alle $d' \in D$ die Interpretation $(I^{x,d'})^{y,d}$ ein Modell von A.

   In beiden Fällen gilt also $(I^{x,d'})^{y,d} \models A$ für alle $d' \in D$. Dies bedeutet aber $I^{x,d'} \models \exists y\ A$ wieder für alle d'. Daher gilt $I \models \forall x \exists y\ A$.

2. $\exists y \forall x\ A$ folgt logisch aus $\forall x \exists y\ A$
   Ob die Aussage stimmt oder nicht hängt von A ab.

   a) $A \equiv x = x$. Hier stimmt die Aussage. (klar)
   b) Mit $A \equiv x = y$ ist dagegen die Aussage falsch. (Betrachte eine Interpretation mit zweielementigem Definitionsbereich.)

   Im Allgemeinen folgt aus $\forall x \exists y\ A$ nicht logisch $\exists y \forall x\ A$. (Das „nicht“ bezieht sich auf „folgt“ und nicht auf „logisch“).

3. $\forall x\ f(x) = g(x)$ folgt $f = g$ logisch
   Da $f = g$ gar keine Formel ist, kann $f = g$ auch nicht aus $\forall x\ f(x) = g(x)$ logisch folgen.

zu **Aufgabe46:**

$A_1 \equiv \forall x \exists P[P(x) \vee x = f(a)] \to (Q(y,z) \to \forall x \exists P[P(x) \vee x = f(a)])$:
Diese Formel entsteht aus $p \to (q \to p)$, indem p durch $\forall x \exists P[P(x) \vee x = f(a)]$ und q durch $Q(y,z)$ ersetzt wird. Diese Formel ist bekanntermaßen eine Tautologie und nach dem Tautologie-Theorem ist A_1 dann auch eine Tautologie.

$A_2 \equiv \forall x[q(x)] \to q(h(g(a, f(b)), b, f(c)))$:
Es gilt $A_2 \equiv \forall x[q(x)] \to (q(x))_x[h(g(a, f(b)), b, f(c))]$, also $\forall x[A] \to A_x[t]$ mit $A \equiv q(x)$ und $t \equiv h(g(a, f(b)), b, f(c))$. Diese Formel ist nach Folgerung 3.18 (Folie 178) allgemeingültig.

$A_3 \equiv \forall z[\neg(x = f(x) \to p(f(x))) \to (p(f(x)) \to x = f(x))]$:
$\neg(p \to q) \to (q \to p)$ ist eine aussagenlogische Tautologie. Mit dem Tautologie-Theorem ist dann auch $\neg(x = f(x) \to p(f(x))) \to (p(f(x)) \to x = f(x))$ eine Tautologie und diese ist wegen des Generalisierungstheorems logisch äquivalent zu A_3, weil z in der Formel nicht vorkommt.

$A_4 \equiv \exists P[P \to q \vee r]$:

Hier wenden wir die Quantorenelimination an: Es gilt

$$\begin{aligned} A_4 \equiv & \exists P[P \to q \vee r] \\ \models\!\!\!= & \!\!\mid (W \to q \vee r) \vee (F \to q \vee r) \\ \models\!\!\!= & \!\!\mid (W \to q \vee r) \vee W \\ \models\!\!\!= & \!\!\mid W. \end{aligned}$$

W ist eine Tautologie, also muss A_4 ebenfalls eine Tautologie sein.

zu **Aufgabe47:**

$A_1 \equiv x_1 \geq x_3$:

- $\sigma(A_1) \equiv (x + 3 \cdot x) \geq 42$
- Die Substitution ist erlaubt, da kein Quantor in A_1 vorkommt.

$A_2 \equiv \forall x[x = 42 \to \neg(x_4 = 3)]$ • $\sigma(A_2) \equiv \forall x[x = 42 \to \neg(f(a, g(b)) = 3)]$

- Die Substitution ist erlaubt, da x nicht in $\sigma(x_4)$ vorkommt.

$A_3 \equiv \exists y[f(y) = 0 \to \forall x[x \geq x_2]]$ • $\sigma(A_3) \equiv \exists y[f(y) = 0 \to \forall x[x \geq (3 - (x + x_1))]]$

- Die Substitution ist nicht erlaubt da x in $\sigma(x_2)$ vorkommt und dieses am Ende in $\sigma(A_3)$ gebunden ist..

$A_4 \equiv p(x_1) \vee \forall x[x + 3 > x_6]$ • $\sigma(A_4) \equiv p(x_1) \vee \forall x[x + 3 > g(y * 2)]$

- Die Substitution ist erlaubt. In $\sigma(x_1)$ kommt zwar x vor, aber es ist am Ende nicht im Wirkungsbereich des Quantors.

$A_5 \equiv \forall x[x_5 = 5 \to x > 3]$ • $\sigma(A_5) \equiv \forall x[(if\ (x > 3)\ then\ 5\ else\ 3) = 5 \to x > 3]$

- Die Substitution ist nicht erlaubt, x kommt in $\sigma(x_5)$ vor.

$A_6 \equiv x_3 < x_4 \vee \forall y[p(y) \vee y = 3]$ • $\sigma(A_6) \equiv 42 < f(a, g(b)) \vee \forall y[p(y) \vee y = 3]$

- Die Subsituition ist erlaubt, es wird nur außerhalb des Quantors ersetzt.

$A_7 \equiv \forall x_3[x_3 = 42]$ • $\sigma(A_7) \equiv \forall x_3[x_3 = 42]$

- Die Subsituition ist erlaubt, da hier keine freie Variable vorkommt, also gar nichts ersetzt wird.

zu **Aufgabe48:**

Für die hier verwendeten Sätze, Äquivalenzen etc. siehe Folien 181ff.

1. $\{\forall x[3 \cdot x > 4], \exists x[p(x)], q(3 + 4)\} \models \forall x[42 > x] \to \exists x[p(x)]$:
   Mit dem Deduktionstheorem ziehen wir den ersten Teil der rechten Formel in die Menge und erhalten dann $\{\cdots, \exists x[p(x)], \cdots\} \models \exists x[p(x)]$, was offensichtlich gilt.
2. $\{p(a), p(x + 3) \to \exists y[y > p(x + 3)], p \vee q, p(x + 3)\} \models \exists y[y > p(x + 3)]$:
   Modus-Ponens auf $p(x + 3)$ und $p(x + 3) \to \exists y[y > p(x + 3)]$ angewendet ergibt die Behauptung.
3. $\{\forall x[3 \cdot x > 4], \exists x[p(x)], q(3 + 4)\} \models \forall y[\forall x[42 > x] \to \exists x[p(x)]]$:
   Die rechte Formel ist eine Generalisierung der Formel aus 1. Diese Regel ist anwendbar, weil y in $\forall x[42 > x] \to \exists x[p(x)]$ nicht (frei) vorkommt.

4. $\forall x[\neg(p(x) \to \exists y[q(f(x,x))])] \models \neg(\forall y[p(y)] \to q(f(x,x)))$:
   Wegen des Ersetzungstheorems gilt

$$\begin{aligned} & \forall x[\neg(p(x) \to \exists y[q(f(x,x))])] \\ \models\!\!\!=\!\!\!| & \forall x[\neg(p(x) \to \neg\forall y[\neg q(f(x,x))])]. \end{aligned}$$

   y kommt in $\neg q(f(x,x))$ nicht frei vor, also liefert die Generalisierung

$$\begin{aligned} & \forall x[\neg(p(x) \to \exists y[q(f(x,x))])] \\ \models & \forall x[\neg(p(x) \to \neg\neg q(f(x,x)))]. \end{aligned}$$

   Man beachte, dass hier nur $\models$ statt $\models\!\!\!=\!\!\!|$ gilt. Weiter geht es wieder mit dem Ersetzungstheorem:

$$\begin{aligned} & \forall x[\neg(p(x) \to \neg\neg q(f(x,x)))] \\ \models\!\!\!=\!\!\!| & \forall x[\neg(p(x) \to q(f(x,x)))] \\ \models\!\!\!=\!\!\!| & \neg\exists x[\neg\neg(p(x) \to q(f(x,x)))] \\ \models\!\!\!=\!\!\!| & \neg\exists x[p(x) \to q(f(x,x))] \\ \models\!\!\!=\!\!\!| & \neg(\forall y[p(y)] \to q(f(x,x))). \end{aligned}$$

5. $\Gamma, A \models \neg B$ gdw. $\Gamma, B \models \neg A$:
   $\Gamma, A \models \neg B$ gilt genau dann, wenn Γ, A, B unerfüllbar ist. Dies wiederum ist genau dann der Fall, wenn $\Gamma, B \models \neg A$.