

Übungen zur Vorlesung Logik
Blatt 7

Prof. Dr. Klaus Madlener

Abgabe bis 17. Juni 2009 10:00 Uhr

33. Aufgabe: [Strukturelle Induktion und NNF, Übung]

Sei A eine Formel in Negationsnormalform, in der p nur positiv vorkommt. Zeigen Sie mit struktureller Induktion:

$$A[p/0] \models A[p/1].$$

34. Aufgabe: [Resolution, Übung]

Zeigen Sie mit Resolution:

1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ ist Tautologie.
2. $\{p \vee q, q \vee r\} \models p \vee r$.
3. $X \equiv (E \rightarrow M) \wedge ((S \rightarrow F) \wedge ((M \vee F \rightarrow A) \wedge (\neg A)))$ ist erfüllbar.

35. Aufgabe: [Davis-Putnam, 6 + 1 + 2 P]

1. Zeigen Sie, dass die Pure-Literal-Regel des Davis-Putnam-Verfahrens korrekt ist. Genauer: Zeigen Sie, dass für jede aussagenlogische Formel $A \in \text{NNF}(\{\neg, \wedge, \vee\})$ folgendes gilt:
 - a) Wenn ein Atom p in A nur positiv vorkommt, dann ist A erfüllungsäquivalent zu $A[p/1]$
 - b) Wenn ein Atom p in A nur negativ vorkommt, dann ist A erfüllungsäquivalent zu $A[p/0]$
2. Warum muss man fordern, dass A in Negationsnormalform vorliegt? An welcher Stelle würde der obige Beweis ohne diese Forderung scheitern?
3. Geben Sie eine Formel $A \in F(\{\neg, \wedge, \vee\})$ an, auf die die Regel anwendbar ist und für die $A[p/1]$ bzw. $A[p/0]$ nicht erfüllbarkeitsäquivalent zu A sind.

36. Aufgabe: [Resolution, 10P]

Zeigen Sie mit Resolution:

1. $p \models p \vee q$.
2. $\{p \vee q, \neg q \vee r\} \models p \vee r$.
3. $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$ ist Tautologie.
4. $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow \neg(\neg r \wedge p)$ ist Tautologie.
5. $\neg((\neg p \rightarrow (q \vee r)) \wedge \neg((p \wedge \neg q) \vee (r \wedge \neg s \wedge t)) \wedge (q \rightarrow s) \wedge \neg(s \vee \neg t))$ ist Tautologie.

37. Aufgabe: [Korrektheit der Resolution, 4P]

Beweisen Sie die Korrektheit des Resolutionskalküls.

Abgabe: bis 17. Juni 2009 10:00 Uhr im Kasten neben Raum 34/401.4

zu **Aufgabe33:**

IA: Sei $A \equiv p_i$

Fall 1: $p_i \equiv p$ Dann ist $A[p/0] = 0$ und $A[p/1] = 1$, also gilt $A[p/0] \models A[p/1]$.

Fall 2: $p_i \neq p$ Dann ist $A[p/0] = A[p/1]$, also gilt ebenfalls $A[p/0] \models A[p/1]$.

IV: Es gelte $B[p/0] \models B[p/1]$ für alle echten Teilformeln von A .

IS: Fall 1: $A \equiv \neg B$ Dann ist B ein Atom, weil A in NNF ist. Da p in A nur positiv vorkommt, muss $B \equiv p_i \neq p$ sein, also kommt p in A nicht vor. Dann gilt $A[p/0] \equiv A[p/1]$ und deshalb auch $A[p/0] \models A[p/1]$.

Fall 2: $A \equiv B \wedge C$ Nach Induktionsvoraussetzung gilt $B[p/0] \models B[p/1]$ und $C[p/0] \models C[p/1]$. Deshalb erfüllen auch alle Bewertungen, die sowohl $B[p/0]$ als auch $C[p/0]$ erfüllen, sowohl $B[p/1]$ als auch $C[p/1]$. Daher gilt $A[p/0] \equiv B[p/0] \wedge C[p/0] \models B[p/1] \wedge C[p/1] \equiv A[p/1]$.

Fall 3: $A \equiv B \vee C$ Nach Induktionsvoraussetzung gilt $B[p/0] \models B[p/1]$ und $C[p/0] \models C[p/1]$. Deshalb erfüllen auch alle Bewertungen, die eine der Formeln $B[p/0]$ oder $C[p/0]$ erfüllen, auch eine der Formeln $B[p/1]$ oder $C[p/1]$. Daher gilt $A[p/0] \equiv B[p/0] \vee C[p/0] \models B[p/1] \vee C[p/1] \equiv A[p/1]$.

zu **Aufgabe34:**

1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ ist Tautologie.

Hierfür muss gezeigt werden, dass $\neg(A \rightarrow (B \rightarrow A))$ unerfüllbar ist. Zunächst wird die Formel in KNF umgewandelt, es gilt

$$\neg(A \rightarrow (B \rightarrow A)) \models \neg(\neg A \vee \neg B \vee A) \models (A \wedge B \wedge \neg A),$$

was der Klauselmengemenge $\{\{A\}, \{B\}, \{\neg A\}\}$ entspricht. Hierauf ist sofort die Resolutionsregel anwendbar, die Resolvente der Klauseln A und $\neg A$ ist die leere Klausel 0 .

2. $\{p \vee q, q \vee r\} \models p \vee r$.

Zu zeigen ist, dass $\{p \vee q, q \vee r, \neg(p \vee r)\}$ unerfüllbar ist. Die letzte Formel muss dafür noch in KNF gebracht werden und man erhält die Klauselmengemenge $\{\{p, q\}, \{q, r\}, \{\neg p\}, \{\neg r\}\}$. Zunächst können die beiden ersten Klauseln resolviert werden, so dass man $\{p, r\}$ erhält. Diese Klausel kann nacheinander mit $\{\neg p\}$ und $\{\neg r\}$ resolviert werden, so dass p und r eliminiert werden und die leere Klausel 0 übrig bleibt.

zu **Aufgabe35:**

1. Zu zeigen: A ist erfüllungsäquivalent zu $A[p/1]$ bzw. $A[p/0]$.

Fall a): p kommt in A nur positiv vor. Es ist zu zeigen, dass A genau dann erfüllbar ist, wenn $A[p/1]$ erfüllbar ist.

„ \Rightarrow “: Wir zeigen die stärkere Aussage $A \models A[p/1]$ mittels struktureller Induktion über A .

IA: Sei $A \equiv p_i$

Fall 1: $p_i \equiv p$. Dann ist $A[p/1] \equiv 1$, also eine Tautologie und es gilt $A \models A[p/1]$.

Fall 2: $p_i \neq p$. Dann ist $A[p/1] \equiv p_i \equiv A$ und es gilt ebenfalls $A \models A[p/1]$.

IV: Es gelte $B \models B[p/1]$ für alle (echten) Teilformeln B von A .

IS: Fall 1: $A \equiv \neg B$. Da A in Negationsnormalform ist, ist B ein Atom und da p nur positiv vorkommt, ist $B \neq p$. Daher kommt p in A nicht vor und es gilt $A \equiv A[p/1]$.

Fall 2: $A \equiv B \wedge C$. Jede Bewertung, die A erfüllt, muss B und C erfüllen. Nach Induktionsvoraussetzung erfüllt sie dann auch $B[p/1]$ und $C[p/1]$ und damit auch $B[p/1] \wedge C[p/1] \equiv A[p/1]$

Fall 3: $A \equiv B \vee C$. Jede Bewertung, die A erfüllt, muss B oder C erfüllen. Nach Induktionsvoraussetzung erfüllt sie dann auch $B[p/1]$ oder $C[p/1]$ und damit auch $B[p/1] \vee C[p/1] \equiv A[p/1]$

„ \Leftarrow “: Sei φ eine Bewertung, die $A[p/1]$ erfüllt. Die Bewertung φ' sei durch

$$\varphi'(p_i) := \begin{cases} \varphi(p_i) & \text{falls } p_i \neq p \\ 1 & \text{falls } p_i = p \end{cases}$$

definiert. Wir zeigen nun, dass auch $\varphi'(A) = 1$ gilt. Der Beweis erfolgt wieder durch strukturelle Induktion.

IA: Sei $A \equiv p_i$

Fall 1: $p_i \equiv p$. Dann ist $\varphi'(A) = \varphi'(p) = 1$.

Fall 2: $p_i \neq p$. Dann ist $\varphi'(A) = \varphi'(p_i) = \varphi(p_i) = \varphi(A[p/1]) = 1$.

IV: Es gelte $\varphi(B[p/1]) = 1 \Rightarrow \varphi'(B) = 1$ für alle (echten) Teilformeln B von A .

IS: Fall 1: $A \equiv \neg B$. Analog zu oben ist $A \equiv \neg p_i \equiv A[p/1]$ mit $p_i \neq p$. Damit gilt $\varphi'(A) = 1 - \varphi'(p_i) = 1 - \varphi(p_i) = \varphi(A[p/1]) = 1$.

Fall 2: $A \equiv B \wedge C$. Es gilt $A[p/1] \equiv B[p/1] \wedge C[p/1]$. Da $\varphi(A[p/1]) = 1$ ist, gilt auch $\varphi(B[p/1]) = 1$ und $\varphi(C[p/1]) = 1$ und nach Induktionsvoraussetzung $\varphi'(B) = 1$ und $\varphi'(C) = 1$. Damit ist auch $\varphi'(A) = 1$.

Fall 3: $A \equiv B \vee C$. Es gilt $A[p/1] \equiv B[p/1] \vee C[p/1]$. Da $\varphi(A[p/1]) = 1$ ist, so gilt auch $\varphi(B[p/1]) = 1$ oder $\varphi(C[p/1]) = 1$ und nach Induktionsvoraussetzung $\varphi'(B) = 1$ oder $\varphi'(C) = 1$. Damit ist auch $\varphi'(A) = 1$.

Damit ist gezeigt, dass in Fall a) die Formel $A \in \text{NNF}$ erfüllungsäquivalent zu $A[p/1]$ ist.

Fall b): p kommt in A nur negativ vor. Es ist zu zeigen, dass A genau dann erfüllbar ist, wenn $A[p/0]$ erfüllbar ist.

„ \Rightarrow “: Wir zeigen die stärkere Aussage $A \models A[p/0]$ mittels struktureller Induktion über A .

IA: Sei $A \equiv p_i$. Da p nur negativ vorkommt, ist dann $p_i \neq p$ und damit $A[p/0] \equiv A$, so dass auch $A \models A[p/1]$ gilt.

IV: Es gelte $B \models B[p/0]$ für alle (echten) Teilformeln B von A .

IS: Fall 1: $A \equiv \neg B$. Da A in Negationsnormalform ist, ist B ein Atom.

Fall 1: $p_i \equiv p$. Dann ist $A \equiv \neg p$ und damit $A[p/0] = 1$, also eine Tautologie und es gilt $A \models A[p/0]$.

Fall 2: $p_i \not\equiv p$. Dann ist $A[p/0] \equiv A$ und es gilt ebenfalls $A \models A[p/0]$.

Fall 2: $A \equiv B \wedge C$. Jede Bewertung, die A erfüllt, muss B und C erfüllen. Nach Induktionsvoraussetzung erfüllt sie dann auch $B[p/0]$ und $C[p/0]$ und damit auch $B[p/0] \wedge C[p/0] \equiv A[p/0]$

Fall 3: $A \equiv B \vee C$. Jede Bewertung, die A erfüllt, muss B oder C erfüllen. Nach Induktionsvoraussetzung erfüllt sie dann auch $B[p/0]$ oder $C[p/0]$ und damit auch $B[p/0] \vee C[p/0] \equiv A[p/0]$

„ \Leftarrow “: Sei φ eine Bewertung, die $A[p/0]$ erfüllt. Die Bewertung φ' sei durch

$$\varphi'(p_i) := \begin{cases} \varphi(p_i) & \text{falls } p_i \neq p \\ 0 & \text{falls } p_i = p \end{cases}$$

definiert. Wir zeigen nun, dass auch $\varphi'(A) = 1$ gilt. Der Beweis erfolgt wieder durch strukturelle Induktion.

IA: Sei $A \equiv p_i$. Da p nur negativ vorkommt, ist dann $p_i \neq p$ und damit $\varphi'(A) = \varphi(A[p/0]) = 1$.

IV: Es gelte $\varphi(B[p/1]) = 1 \Rightarrow \varphi'(B) = 1$ für alle (echten) Teilformeln B von A .

IS: Fall 1: $A \equiv \neg B$.

Fall 1: $p_i \equiv p$. Dann ist $A \equiv \neg p$ und damit $\varphi'(A) = 1$.

Fall 2: $p_i \not\equiv p$. Dann ist $\varphi'(A) = 1 - \varphi'(p_i) = 1 - \varphi(p_i) = \varphi(A[p/0]) = 1$.

Fall 2: $A \equiv B \wedge C$. Es gilt $A[p/0] \equiv B[p/0] \wedge C[p/0]$. Da $\varphi(A[p/0]) = 1$ ist, gilt auch $\varphi(B[p/0]) = 1$ und $\varphi(C[p/0]) = 1$ und nach Induktionsvoraussetzung $\varphi'(B) = 1$ und $\varphi'(C) = 1$. Damit ist auch $\varphi'(A) = 1$.

Fall 3: $A \equiv B \vee C$. Es gilt $A[p/0] \equiv B[p/0] \vee C[p/0]$. Da $\varphi(A[p/0]) = 1$ ist, so gilt auch $\varphi(B[p/0]) = 1$ oder $\varphi(C[p/0]) = 1$ und nach Induktionsvoraussetzung $\varphi'(B) = 1$ oder $\varphi'(C) = 1$. Damit ist auch $\varphi'(A) = 1$.

Damit ist gezeigt, dass in Fall b) die Formel $A \in \text{NNF}$ erfüllungsäquivalent zu $A[p/0]$ ist.

- Die Forderung, dass A in Negationsnormalform vorliegt, ist in den Negationsfällen in den Induktionsschritten wichtig. Dort garantiert die NNF-Eigenschaft, dass keine Formeln der Form $\neg(B \wedge C)$ oder $\neg(B \vee C)$ vorkommen können. Auf diese könnten nämlich die DeMorgan-Regeln angewendet werden, was die Argumentation zunichte macht. Anders ausgedrückt könnte das Auftreten von DeMorgan-fähigen Teilformeln in A dazu führen, dass A eine äquivalente Formel in NNF hat, in der gar nicht nur positiv oder nur negativ vorkommt. Kommen solche Teilformeln vor, so kann man also nicht sicher sein, dass die Pure-Literal-Regel in ihrem eigentlichen Sinne überhaupt anwendbar ist.

3. Eine Formel $A \in F(\{\neg, \wedge, \vee\})$ an, auf die die Regel scheinbar anwendbar ist und für die $A[p/1]$ nicht erfüllbarkeitsäquivalent zu A ist, muss entsprechend obiger Überlegung p nur positiv vorkommen und eine Teilformel haben, auf die die DeMorgan-Regeln angewendet werden können, so dass p in einer entsprechenden NNF-Formel eben doch nicht nur positiv vorkommt. Ein Beispiel ist

$$A \equiv \neg(p \vee \neg(p \vee q)).$$

Diese Formel ist erfüllbar und es gilt

$$A \models \neg p \wedge (p \vee q).$$

Setzt man jedoch $p = 1$ und vereinfacht die Formel nach den Regeln zur Bildung von $A[p/1]$, so ergibt sich

$$A \rightsquigarrow \neg(1 \vee \neg(1 \vee q)) \rightsquigarrow \neg 1 \rightsquigarrow 0 \equiv A[p/1].$$

$A[p/1]$ ist also unerfüllbar.

zu **Aufgabe36:**

1. $p \models p \vee q$:
zu zeigen: $\{\{p\}, \{\neg p\}, \{\neg q\}\}$ ist unerfüllbar. Dies geht sofort, da $\text{Res}_p(p, \neg p) = 0$ ist.
2. $\{p \vee q, \neg q \vee r\} \models p \vee r$:
zu zeigen: $\{\{p, q\}, \{\neg q, r\}, \{\neg p\}, \{\neg r\}\}$ ist unerfüllbar.

$$\begin{aligned} K_1 &= \{p, q\}, \\ K_2 &= \{\neg q, r\}, \\ K_3 &= \{\neg p\}, \\ K_4 &= \{\neg r\} \\ K_5 &= \text{Res}_p(K_1, K_3) = \{q\}, \\ K_6 &= \text{Res}_r(K_2, K_4) = \{\neg q, \}, \\ K_7 &= \text{Res}_F(K_5, K_6) = 0. \end{aligned}$$

3. $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$ ist Tautologie:
zu zeigen: $\neg((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$ ist unerfüllbar. Zunächst muss die Formel in KNF gebracht werden:

$$\begin{aligned} \neg(((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p) &\models \neg(\neg(\neg(\neg p \vee q) \vee p) \vee p) \\ &\models ((\neg(\neg p \vee q) \vee p) \wedge \neg p) \\ &\models (((p \wedge \neg q) \vee p) \wedge \neg p) \\ &\models ((p \vee p) \wedge (p \vee \neg q) \wedge \neg p). \end{aligned}$$

Dies entspricht der Klauselmenge $\{\{p\}\{p, \neg q\}\{\neg p\}\}$, woraus sofort $\text{Res}_p(p, \neg p) = 0$ hergeleitet werden kann.

4. $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow \neg(\neg r \wedge p)$ ist Tautologie:
zu zeigen: $\neg((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow \neg(\neg r \wedge p)$ ist unerfüllbar. Wieder wird die Formel in KNF gebracht:

$$\begin{aligned}\neg((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow \neg(\neg r \wedge p) &\models ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \wedge (\neg r \wedge p) \\ &\models ((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge \neg r \wedge p).\end{aligned}$$

Der Beweis ist nun der folgende:

$$\begin{aligned}K_1 &= \{\neg p, q\}, \\ K_2 &= \{\neg q, r\}, \\ K_3 &= \{p\}, \\ K_4 &= \{\neg r\} \\ K_5 &= \text{Res}_p(K_1, K_3) = \{q\}, \\ K_6 &= \text{Res}_r(K_2, K_4) = \{\neg q, \}, \\ K_7 &= \text{Res}_F(K_5, K_6) = 0.\end{aligned}$$

5. $\neg(\neg p \rightarrow (q \vee r)) \wedge \neg((p \wedge \neg q) \vee (r \wedge \neg s \wedge t)) \wedge (q \rightarrow s) \wedge \neg(s \vee \neg t)$ Tautologie:
zu zeigen:

$$\begin{aligned}K_1 &= \{p, q, r\}, \\ K_2 &= \{\neg p, q\}, \\ K_3 &= \{\neg r, s, \neg t\}, \\ K_4 &= \{\neg q, s\}, \\ K_5 &= \{\neg s\}, \\ K_6 &= \{t\}\end{aligned}$$

ist unerfüllbar. Beweis:

$$\begin{aligned}K_7 &= \text{Res}_p(K_1, K_2) = \{q, r\} \\ K_8 &= \text{Res}_p(K_3, K_5) = \{\neg r, \neg t\} \\ K_9 &= \text{Res}_p(K_7, K_8) = \{q, \neg t\} \\ K_{10} &= \text{Res}_p(K_9, K_6) = \{q\} \\ K_{11} &= \text{Res}_p(K_4, K_5) = \{\neg q\} \\ K_{12} &= \text{Res}_p(K_{10}, K_{11}) = 0\end{aligned}$$

zu Aufgabe37:

Zum Beweis der Korrektheit des Resolutionskalküls muss gezeigt werden, dass die Regel korrekt ist, dass also für zwei resolvierbare Klauseln $A \equiv \{L_1, L_2, \dots, L_n\}$ und $B \equiv \{L_1' \equiv \neg L_1, L_2', \dots, L_m'\}$ die Folgerung $A, B \models \text{Res}_{L_1}(A, B)$ gilt.

Sei also φ eine Bewertung, die A und B erfüllt. Dann gibt es ein $1 \leq i \leq n$, so dass $\varphi(L_i) = 1$ und ein $1 \leq j \leq m$, so dass $\varphi(L_j') = 1$. Da $L_1' \equiv \neg L_1$ gilt, kann nicht $i = j = 1$ sein. Die Resolvente von A und B ist $\text{Res}_{L_1}(A, B) \equiv \{L_2, \dots, L_n, L_2', \dots, L_m'\}$, sie enthält also L_i oder L_j' oder sogar beide. Damit gilt auch $\varphi(\text{Res}_{L_1}(A, B)) = 1$.