

Übungen zur Vorlesung Logik  
Blatt 6

Prof. Dr. Klaus Madlener

Abgabe bis 10. Juni 2009 10:00 Uhr

**28. Aufgabe:** [Negationsnormalform, 4P]

Bringen Sie die folgenden Formeln in Negationsnormalform:

1.  $A_1 \equiv p \wedge ((\neg q \rightarrow r) \leftrightarrow (\neg r \vee p))$
2.  $A_2 \equiv (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$
3.  $A_3 \equiv (\neg p_1 \wedge \neg p_2) \vee (p_1 \wedge \neg p_2) \vee (p_2 \wedge \neg p_3) \vee (p_1 \rightarrow p_3)$
4.  $A_4 \equiv \neg(p_1 \rightarrow (\neg p_2 \wedge \neg p_3 \wedge \neg p_5)) \wedge (p_2 \rightarrow (p_4 \rightarrow p_3)) \wedge \neg((p_2 \wedge p_4) \vee (\neg p_2 \wedge p_5))$

**29. Aufgabe:** [Duale Formeln, 5P]

Es sei  $A \in F(\{\neg, \vee, \wedge\})$  und  $d(A)$  die duale Formel von  $A$ . Ferner sei  $\varphi$  eine Bewertung und  $\varphi'$  die durch  $\varphi'(p) := 1 - \varphi(p)$  für alle  $p \in V$  definierte Bewertung. Zeigen Sie  $\varphi'(d(A)) = 1 - \varphi(A)$ .

**30. Aufgabe:** [Größe von Normalformen, 4 P]

Folgendes sollte aus anderen Veranstaltungen bekannt sein: Seien  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ . Dann ist  $O(f) := \{g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \mid \exists \epsilon \in \mathbb{R}_+, \exists n_0 \forall n > n_0 : g(n) \leq \epsilon f(n)\}$

Sei für eine Formel  $A \in F$  die Länge  $|A|$  definiert als die Anzahl der Vorkommen von Atomen, d.h. Variablen.

Zeigen Sie: Zu jeder Formel  $A \in F$  gibt es eine logisch äquivalente Formel  $B \in F(\{\neg, \vee, \wedge\})$  in NNF mit  $|B| \in O(|A|)$ .

**31. Aufgabe:** [Davis-Putnam, 4P]

Testen Sie die Formeln aus Aufgabe 28 mit dem Davis-Putnam-Verfahren auf Erfüllbarkeit.

**32. Aufgabe:** [Davis-Putnam, 4P]

Zeigen Sie mit dem Davis-Putnam-Verfahren:

1.  $p \wedge q, q \rightarrow r \models r$
2.  $p \rightarrow r, q \rightarrow s, p \vee q \models r \vee s$
3.  $\neg q, p \rightarrow q \models \neg p$
4.  $\models \neg(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$

**Abgabe: bis 10. Juni 2009 10:00 Uhr im Kasten neben Raum 34/401.4**

zu **Aufgabe28:**

1.  $A_1 \equiv p \wedge ((\neg q \rightarrow r) \leftrightarrow (\neg r \vee p)):$

$$\begin{aligned} & p \wedge ((\neg q \rightarrow r) \leftrightarrow (\neg r \vee p)) \\ \models & p \wedge ((q \vee r) \leftrightarrow (\neg r \vee p)) \\ \models & p \wedge (((q \vee r) \wedge (\neg r \vee p)) \vee (\neg(q \vee r) \wedge \neg(\neg r \vee p))) \\ \models & p \wedge (((q \vee r) \wedge (\neg r \vee p)) \vee ((\neg q \wedge \neg r) \wedge (r \wedge \neg p))) \\ \models & p \wedge (((q \vee r) \wedge (\neg r \vee p)) \vee (\neg q \wedge \neg r \wedge r \wedge \neg p)) \end{aligned}$$

2.  $A_2 \equiv (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)):$

$$\begin{aligned} & (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)) \\ \models & \neg(\neg p \vee (\neg q \vee r)) \vee (\neg(\neg p \vee q) \vee (\neg p \vee r)) \\ \models & (p \wedge \neg(\neg q \vee r)) \vee ((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \vee r)) \\ \models & (p \wedge (q \wedge \neg r)) \vee ((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \vee r)) \\ \models & (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q) \vee \neg p \vee r \end{aligned}$$

3.  $A_3 \equiv (\neg p_1 \wedge \neg p_2) \vee (p_1 \wedge \neg p_2) \vee (p_2 \wedge \neg p_3) \vee (p_1 \rightarrow p_3):$

$$\begin{aligned} & (\neg p_1 \wedge \neg p_2) \vee (p_1 \wedge \neg p_2) \vee (p_2 \wedge \neg p_3) \vee (p_1 \rightarrow p_3) \\ \models & (\neg p_1 \wedge \neg p_2) \vee (p_1 \wedge \neg p_2) \vee (p_2 \wedge \neg p_3) \vee (\neg p_1 \vee p_3) \\ \models & (\neg p_1 \wedge \neg p_2) \vee (p_1 \wedge \neg p_2) \vee (p_2 \wedge \neg p_3) \vee \neg p_1 \vee p_3 \end{aligned}$$

4.  $A_4 \equiv \neg(p_1 \rightarrow (\neg p_2 \wedge \neg p_3 \wedge \neg p_5)) \wedge (p_2 \rightarrow (p_4 \rightarrow p_3)) \wedge \neg((p_2 \wedge p_4) \vee (\neg p_2 \wedge p_5))$

$$\begin{aligned} & \neg(p_1 \rightarrow (\neg p_2 \wedge \neg p_3 \wedge \neg p_5)) \wedge (p_2 \rightarrow (p_4 \rightarrow p_3)) \wedge \neg((p_2 \wedge p_4) \vee (\neg p_2 \wedge p_5)) \\ \models & \neg(\neg p_1 \vee (\neg p_2 \wedge \neg p_3 \wedge \neg p_5)) \wedge (\neg p_2 \vee p_3 \vee \neg p_4) \wedge \neg((p_2 \wedge p_4) \vee (\neg p_2 \wedge p_5)) \\ \models & p_1 \wedge \neg(\neg p_2 \wedge \neg p_3 \wedge \neg p_5) \wedge (\neg p_2 \vee p_3 \vee \neg p_4) \wedge (\neg(p_2 \wedge p_4) \wedge \neg(\neg p_2 \wedge p_5)) \\ \models & p_1 \wedge (p_2 \vee p_3 \vee p_5) \wedge (\neg p_2 \vee p_3 \vee \neg p_4) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_4) \wedge (p_2 \wedge \neg p_5) \end{aligned}$$

zu **Aufgabe29:**

Der Beweis wird mittels Induktion über den Aufbau von  $A$  geführt.

**Induktionsanfang:** Sei  $A$  atomar, also  $A \equiv p_i$  für ein  $i \in \mathbb{N}$ . Nach Definition von  $\varphi'$  und  $d$  gilt

$$\varphi'(d(A)) = \varphi'(d(p_i)) = \varphi'(p_i) = 1 - \varphi(p_i) = 1 - \varphi(A).$$

**Induktionsschritt:** Sei  $A$  nicht atomar. Dann hat  $A$  die Form  $A \equiv \neg B$ ,  $A \equiv B \vee C$  oder  $A \equiv B \wedge C$ .

Ist  $A \equiv \neg B$ , so folgt

$$\begin{aligned} \varphi'(d(A)) &= \varphi'(d(\neg B)) = \varphi'(\neg d(B)) = 1 - \varphi'(d(B)) \stackrel{\text{I.V.}}{=} 1 - (1 - \varphi(B)) \\ &= 1 - \varphi(\neg B) = 1 - \varphi(A). \end{aligned}$$

Ist  $A \equiv B \vee C$ , so folgt

$$\begin{aligned}\varphi'(d(A)) &= \varphi'(d(B \vee C)) = \varphi'(d(B) \wedge d(C)) = \min\{\varphi'(d(B)), \varphi'(d(C))\} \\ &\stackrel{\text{I.V.}}{=} \min\{1 - \varphi(B), 1 - \varphi(C)\} = 1 - \max\{\varphi(B), \varphi(C)\} \\ &= 1 - \varphi(B \vee C) = 1 - \varphi(A).\end{aligned}$$

Ist  $A \equiv B \wedge C$ , so folgt

$$\begin{aligned}\varphi'(d(A)) &= \varphi'(d(B \wedge C)) = \varphi'(d(B) \vee d(C)) = \max\{\varphi'(d(B)), \varphi'(d(C))\} \\ &\stackrel{\text{I.V.}}{=} \max\{1 - \varphi(B), 1 - \varphi(C)\} = 1 - \min\{\varphi(B), \varphi(C)\} \\ &= 1 - \varphi(B \wedge C) = 1 - \varphi(A).\end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt.

### zu Aufgabe30:

1. Strukturelle Induktion: Zeige: Es gibt eine äquivalente Formel in NNF mit der gleichen Anzahl atomarer Formeln:

**IA:**  $A = p \in V$ . Ist auch in NNF.

**IS:** Seien  $A, B \in F$  und  $A', B'$  die dazu äquivalenten Formeln, die die Bedingung der Anzahl der Literale erfüllen.

Von Interesse sind lediglich die Fälle, wo die Negation auftaucht, also  $\neg(A \wedge B)$ ,  $\neg(A \vee B)$ ,  $\neg(A \rightarrow B)$ ,  $\neg(A \leftrightarrow B)$  und  $\neg(\neg A)$ , in allen anderen Fällen folgt die Behauptung sofort aus der IV.

Es gelten  $\neg(A' \leftrightarrow B') \models (\neg A') \leftrightarrow B'$ ,  $\neg(A' \rightarrow B') \models A' \wedge \neg B'$ ,  $\neg(A' \vee B') \models \neg A' \wedge \neg B'$ ,  $\neg(A' \wedge B') \models \neg A' \vee \neg B'$ .

Nach IV kann ebenfalls die Existenz von Formeln in NNF mit der Bedingung für  $\neg A'$  und  $\neg B'$  vorausgesetzt werden.

Also gibt es zu jeder Formel eine in NNF, die genauso viele Vorkommen von atomaren Formeln enthält.

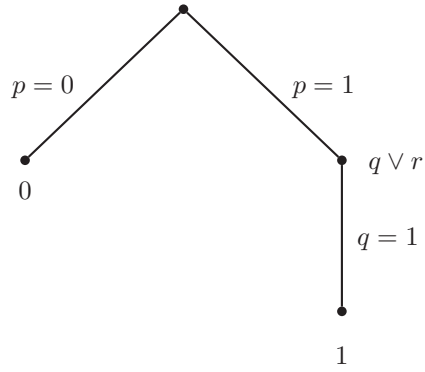
Man könnte auch die gleiche Aussage über die Zeichenlänge beweisen. Dann müßte man allerdings die zwei als konstanten Faktor zwischen den Längen benutzen. Für jedes Atom einer Teilformel kommt schlimmstenfalls ein  $\neg$ -Zeichen dazu beim Umformen, abzüglich des äußeren  $\neg$ -Symbols. Man könnte auch kleinere Faktoren versuchen, z.B. 5/4.

zu **Aufgabe31:**

Wir gehen von den Negationsnormalformen aus der Lösung von Aufgabe 28 aus und konstruieren analog zur Vorlesung (S. 117) einen Baum, der die Formeln beschreibt, die im Laufe des Algorithmus entstehen.

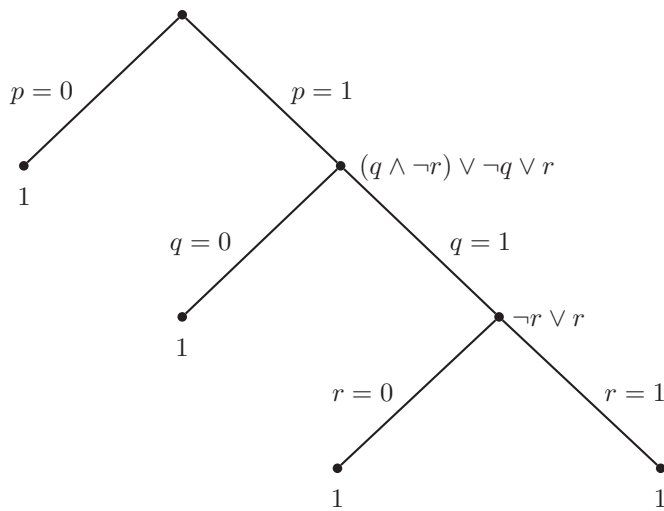
1.  $A_1 \equiv p \wedge ((\neg q \rightarrow r) \leftrightarrow (\neg r \vee p)):$

$$p \wedge (((q \vee r) \wedge (\neg r \vee p)) \vee (\neg q \wedge \neg r \wedge r \wedge \neg p))$$

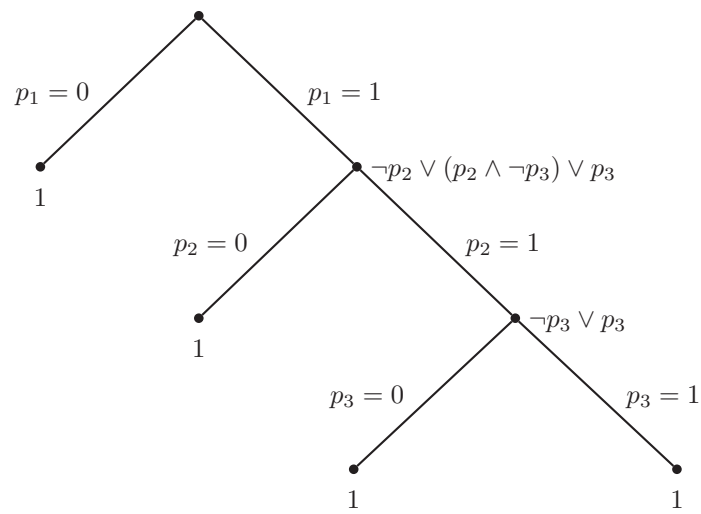


2.  $A_2 \equiv (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)):$

$$(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q) \vee \neg p \vee r$$

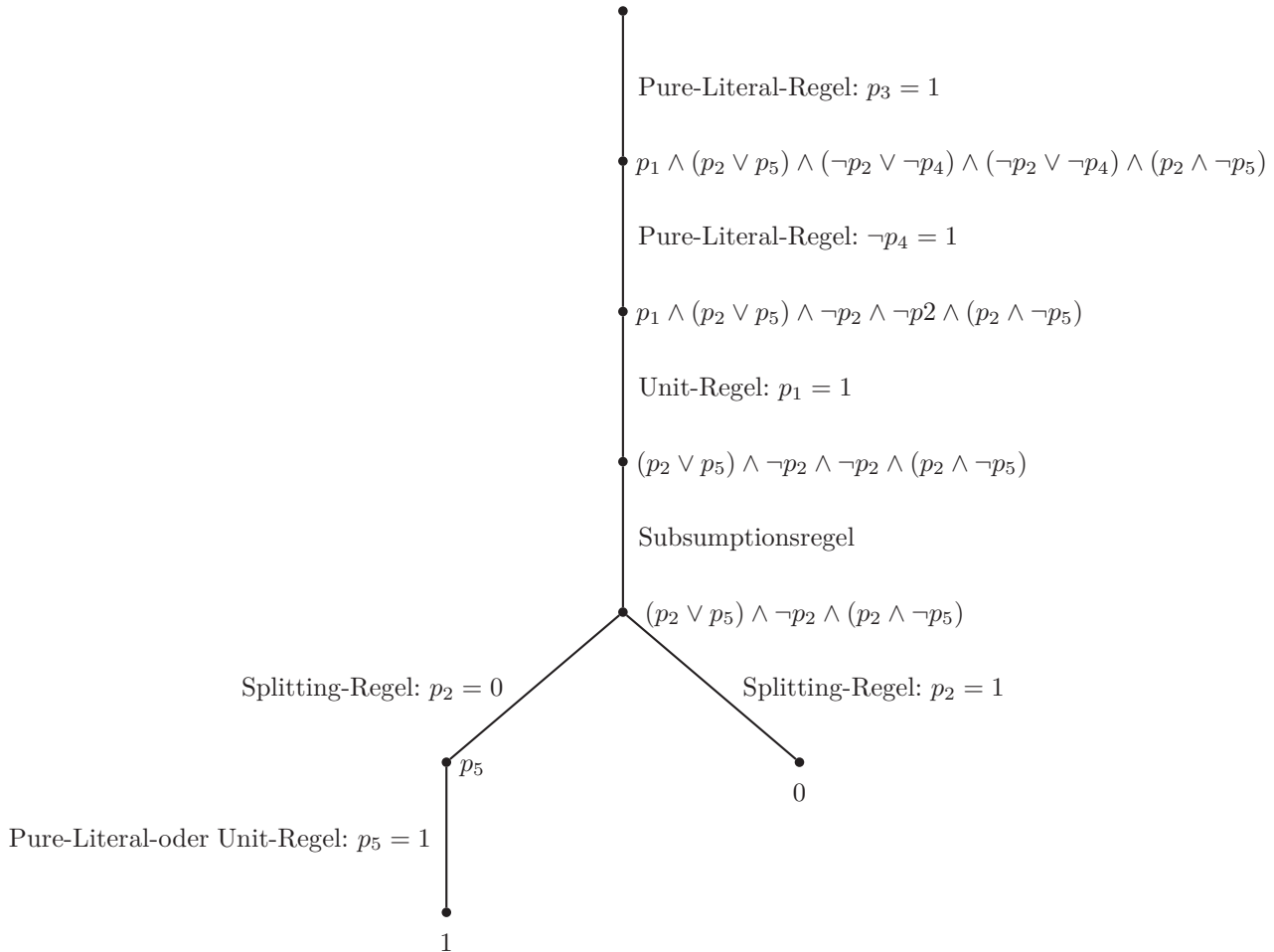


3.  $A_3 \equiv (\neg p_1 \wedge \neg p_2) \vee (p_1 \wedge \neg p_2) \vee (p_2 \wedge \neg p_3) \vee (p_1 \rightarrow p_3)$ :  
 $(\neg p_1 \wedge \neg p_2) \vee (p_1 \wedge \neg p_2) \vee (p_2 \wedge \neg p_3) \vee \neg p_1 \vee p_3$



4.  $A_4 \equiv \neg(p_1 \rightarrow (\neg p_2 \wedge \neg p_3 \wedge \neg p_5)) \wedge (p_2 \rightarrow (p_4 \rightarrow p_3)) \wedge \neg((p_2 \wedge p_4) \vee (\neg p_2 \wedge p_5))$ :  
 Diese Formel ist nach der Umformung in Aufgabe 28 nicht nur in Negationsnormalform, sondern sogar in KNF, so dass hier neben der Pure-Literal- und der Splitting-Regel auch noch die Unit- und die Subsumptionsregel angewendet werden kann.

$$p_1 \wedge (p_2 \vee p_3 \vee p_5) \wedge (\neg p_2 \vee p_3 \vee \neg p_4) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_4) \wedge (p_2 \wedge \neg p_5)$$



zu **Aufgabe32**: Es gibt zwei Möglichkeiten, um  $\Sigma \models A$  zu zeigen:

1. Man zeigt, dass  $\Sigma \cup \{\neg A\}$  unerfüllbar ist. Dazu bildet man die Konjunktion aller Formeln in  $\Sigma \cup \{\neg A\}$ , bringt sie in NNF und zeigt, dass es keine erfüllende Belegung gibt. An allen Blättern des Davis-Putnam-Baumes muss also immer 0 stehen.
2. Man schiebt mit dem Deduktionstheorem alle Formeln aus  $\Sigma$  nach rechts und zeigt, dass die resultierende Formel eine Tautologie ist, d.h. dass an allen Blättern des Baumes 1 steht.