Übungen zur Vorlesung Logik
Blatt 5

Prof. Dr. Klaus Madlener Abgabe bis 27. Mai 2009 10:00 Uhr

22. Aufgabe: [Tableaux, Übung]
In Aufgabe 2 wurde ein Diätplan durch die Aussageform

$$A \equiv (\neg B \to F) \wedge (((B \wedge F) \to \neg E) \wedge ((E \vee \neg B) \to \neg F))$$

dargestellt. Konstruieren Sie für A ein vollständiges Tableau. Welche Eigenschaften von A kann man dem Tableau ansehen? Stellen Sie mit Hilfe des Tableaux eine Disjunktive Normalform für A auf.

23. Aufgabe: [Tableauxfolgerung, Übung]
Zeigen Sie

1. $(A \wedge \neg B) \vdash_\tau \neg((\neg A) \wedge (\neg B))$
2. $(A \wedge (A \to B)) \vdash_\tau B$
3. $A \to (B \to C) \vdash_\tau (A \to B) \to (A \to C)$

24. Aufgabe: [Tableauxfolgerung, 5P]
Zeigen Sie

1. $\{p, p \vee q, p \to s, r \to q\} \vdash_\tau q \to p$
2. $\{p, p \vee q, p \to s, r \to q\} \vdash_\tau s$
3. $\vdash_\tau (\neg(p \to q) \to (q \to p))$
4. $F \vdash_\tau q \to p \wedge (\neg(s \wedge \neg(s \vee ((q \wedge r) \to p))))$
5. $\neg((A \to (A \vee C)) \wedge D) \vdash_\tau (C \to B) \vee \neg D$

25. Aufgabe: [DNF aus Tableaux, 2P]
Finden Sie mit Hilfe der Tableauxmethode disjunktive Normalformen für die folgenden Formeln:

1. $(p \to \neg(\neg q \to r)) \to (q \vee r)$
2. $(q \to p) \to \neg(r \to q)$

26. Aufgabe: [Tableaux mit Äquivalenz, 5P]

1. In der Vorlesung wurden die α- und β-Formeln nur für $\{\neg, \wedge, \vee, \to\}$ definiert und $\leftrightarrow$ weggelassen. Ist $A \equiv B \leftrightarrow C$ eine α- oder β-Formel und welche Komponenten hat diese Aussageform?

2. Wie würde man bei beliebigen anderen weiteren Operatoren verfahren?

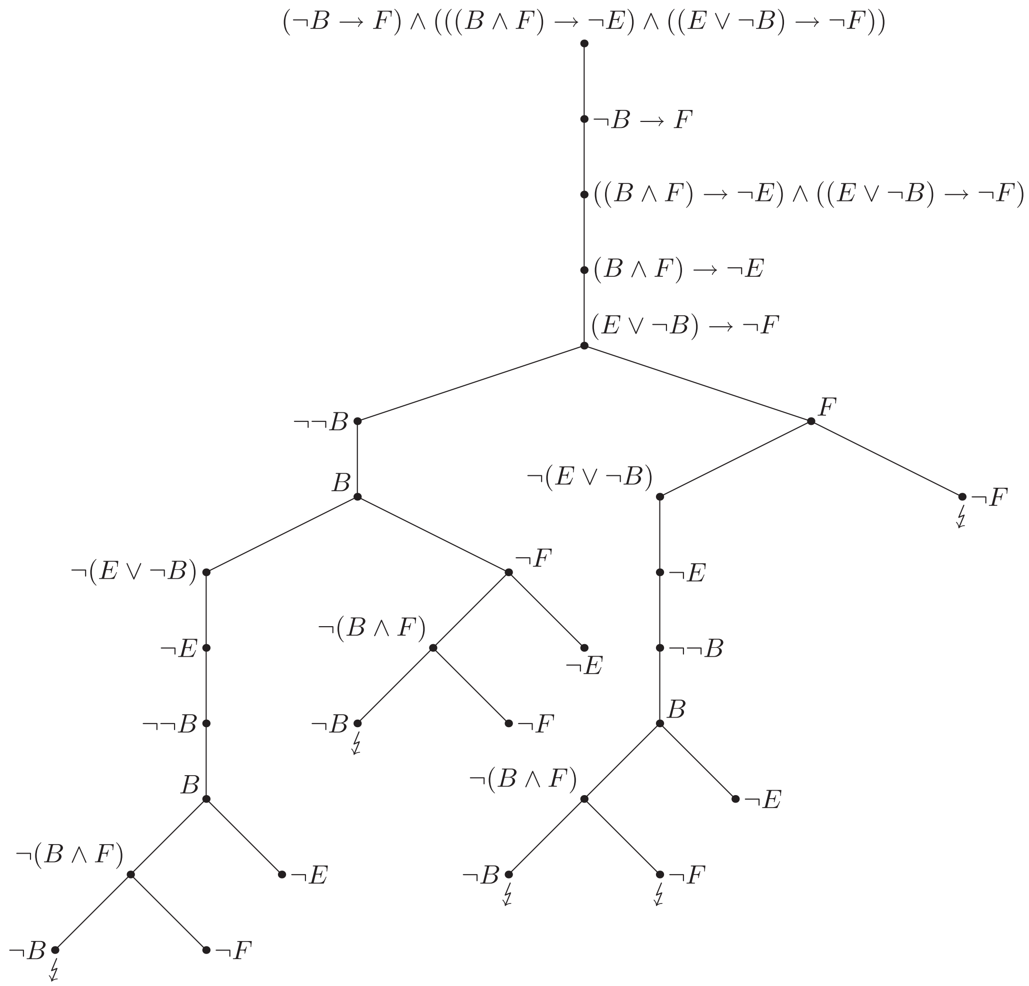
27. Aufgabe: [Möglichkeiten und Grenzen der Tableauxmethode, 5P]
Können die folgenden Aussagen mit der Tableauxmethode bewiesen werden? Begründen Sie Ihre Antworten.

1. $\{p, q, r, s\} \models t$
2. $\{p, q, r, s\} \not\models \neg(q \to s)$
3. $F \models \neg(p \to (q \leftrightarrow r) \wedge \neg r) \to (s \vee \neg p)$
4. $\Sigma := \{p_i \wedge \neg p_{i+1} | i \in \mathbb{N}\}$ ist unerfüllbar
5. $\Sigma := \{p_i \wedge \neg p_{i+1} | i \in \nvDash \mathbb{N}\}$ ist erfüllbar

Geben Sie so allgemeine Antworten wie möglich. D.h. wenn Sie z.B. erklären können, dass es einen Tableaux-Beweis gibt, ohne diesen anzugeben, dann geben Sie ihn auch nicht an.

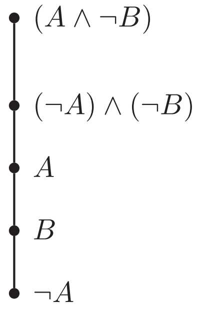
Abgabe: bis 27. Mai 2009 10:00 Uhr im Kasten neben Raum 34/401.4

zu **Aufgabe22:**

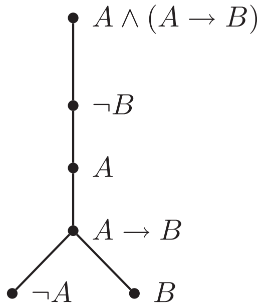


zu **Aufgabe23:**

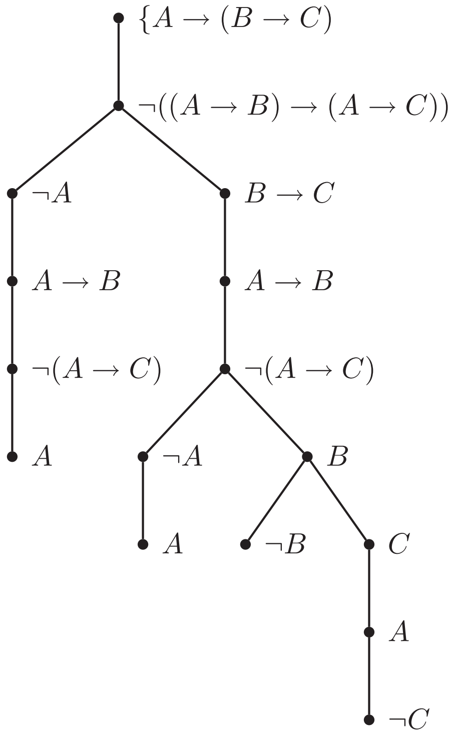
1. Zeige: $\{(A \wedge \neg B), (\neg A) \wedge (\neg B)\}$ ist widerspruchsvoll.



2. Zeige: $\{A \wedge (A \to B), \neg B\}$ ist widerspruchsvoll.

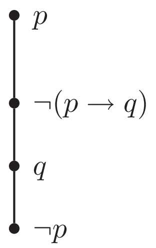


3. Zeige $\{A \to (B \to C), \neg((A \to B) \to (A \to C))$ ist widerspruchsvoll.

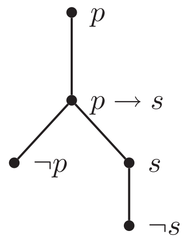


zu **Aufgabe24:**

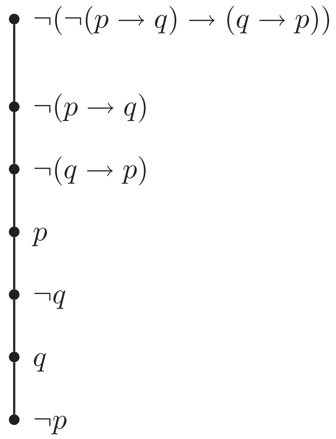
1. Zeige: $\{p, p \vee q, p \to s, r \to q\}, \neg(q \to p)$ ist widerspruchsvoll.



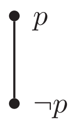
2. Zeige: $\{p, p \vee q, p \to s, r \to q, \neg s\}$ ist widerspruchsvoll.



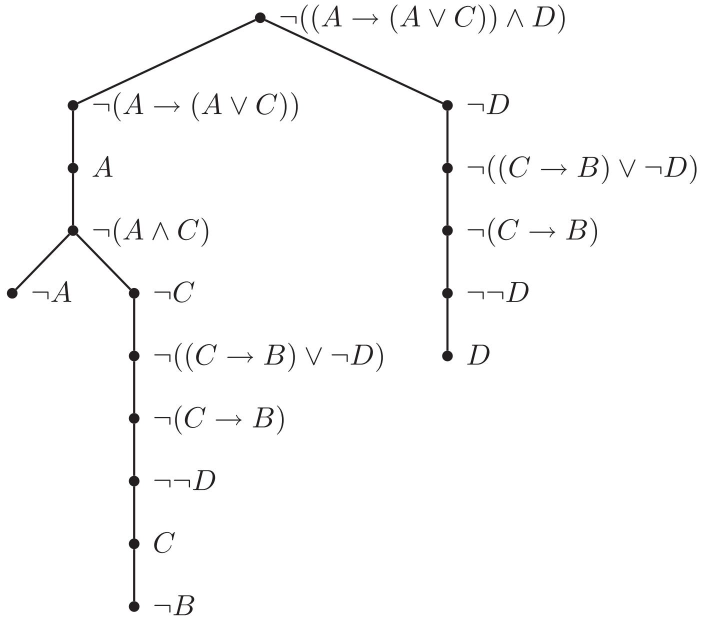
3. Zeige: $\neg(\neg(p \to q) \to (q \to p))$ ist widerspruchsvoll.



4. Zeige: $F \cup \neg(q \to p \wedge (\neg(s \wedge \neg(s \vee ((q \wedge r) \to p))))))$ ist widerspruchsvoll. Dazu reicht es zu zeigen, dass F widerspruchsvoll ist.

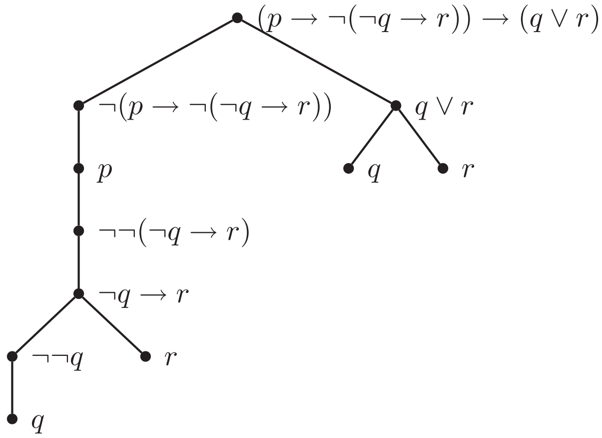


5. Zeige: $\neg((A \to (A \vee C)) \wedge D), \neg((C \to B) \vee \neg D)$ ist widerspruchsvoll.



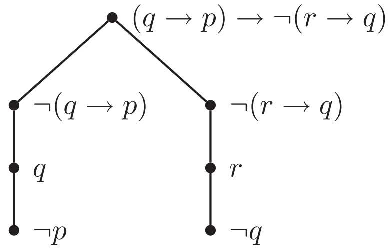
zu **Aufgabe25:**

1. $(p \to \neg(\neg q \to r)) \to (q \vee r)$:



   Jeder Ast steht für eine erfüllende Belegung. Um eine DNF zu erhalten, müssen nun also in jedem Ast die einzeln vorkommenden Literale zu Konjunktionen zusammengefasst und diese dann mit $\vee$ verknüpft werden. Die DNF lautet also $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee q \vee r$ bzw. einfacher $q \vee r$.

2. $(q \to p) \to \neg(r \to q)$:



Die DNF lautet also $(\neg p \wedge q) \vee (\neg q \wedge r)$.

zu **Aufgabe26:**

1. Wegen der logischen Äquivalenzen

$$\begin{aligned} A \leftrightarrow B &\models\!\dashv (A \to B) \wedge (B \to A) \text{ und} \\ A \leftrightarrow B &\models\!\dashv (A \wedge B) \vee (\neg B \wedge \neg A) \end{aligned}$$

   kann $A \leftrightarrow B$ sowohl als α- als auch also β-Formel aufgefasst werden. Als α-Formel hat $A \leftrightarrow B$ die Komponenten $\alpha_1 = A \to B$ und $\alpha_2 = B \to A$, als β-Formel sind die Komponenten $\beta_1 = A \wedge B$ und $\beta_2 = \neg B \wedge \neg A$.

   Man hat natürlich sehr viele Möglichkeiten die Komponenten von $A \leftrightarrow B$ (als α- oder β-Formel) zu definieren. Aufpassen muss man nur, dass die Tableaux-Methode mit dieser Erweiterung weiterhin (für alle endlichen Mengen) terminiert. So würde zum Beispiel die Wahl $\beta_1 = A \leftrightarrow B$ und $\beta_2 = B \to B$ zu keiner effektiven Methode führen.

2. Für beliebige andere Operatoren sucht man sich wie oben gesehen eine logisch äquivalente Darstellung in den gegebenen Operatoren und führt entsprechende α- oder β-Regeln ein. Am naheliegendsten erscheinen eine DNF oder eine KNF des Operators.

zu **Aufgabe27:**

1. $\{p, q, r, s\} \models t$: Hier muss die Unerfüllbarkeit der Menge $\{p, q, r, s, \neg t\}$ gezeigt werden. Dies ist möglich, da die systematische Tableaukonstruktion für eine unerfüllbare Menge immer terminiert (Folie 99).
2. $\{p, q, r, s\} \not\models \neg(q \to s)$: Hier muss die Erfüllbarkeit der Menge $\{p, q, r, s(q \to s)\}$ gezeigt werden.Auch dies gelingt, da die systematische Tableauxkonstruktion immer terminiert, wenn die Menge endlich ist.
3. $F \models \neg(p \to (q \leftrightarrow r) \wedge \neg r) \to (s \vee \neg p)$ Hier muss die Unerfüllbarkeit der Menge $F \cup \{\neg(p \to (q \leftrightarrow r) \wedge \neg r) \to (s \vee \neg p)\}$ gezeigt werden. Dafür reicht es, die Unerfüllbarkeit der Menge F zu zeigen, was mit der systematischen Tableauxkonstruktion gelingt.

4. $\Sigma := \{p_i \wedge \neg p_{i+1} | i \in \mathbb{N}\}$ ist unerfüllbar: Die Aussage kann gezeigt werden, da die Konstruktion für unerfüllbare Mengen terminiert.
5. $\Sigma := \{p_i \wedge \neg p_{i+1} | i \in \not= \mathbb{N}\}$ ist erfüllbar: Die Aussage kann nicht gezeigt werden, da die systematische Tableauxkonstruktion immer weiter neue Tableaux konstruiert, bis sie entweder ein abgeschlossenes Tableau findet oder keine neuen α_1-, α_2-, β_1-, β_2-Formeln (Schritte 3 bzw. 4 im Algorithmus) und auch keine neuen Formeln aus der Menge mehr einsetzen kann. Beide Fälle treten aber hier nicht ein, da τ_Σ kein abgeschlossenes Tableau enthält und Σ unendlich ist, zumindest Schritt 5 also immer wieder ausgeführt werden kann. Der Nachweis, dass τ_Σ kein abgeschlossenes Tableau enthält, kann also nicht geführt werden.