

---

Übungen zur Vorlesung Logik  
Blatt 4

Prof. Dr. Klaus Madlener

Abgabe bis 20. Mai 2009 10:00 Uhr

---

**18. Aufgabe:** [Deduktive Systeme, Übung]Das deduktive System  $\hat{\mathcal{F}}$  entstehe aus  $\mathcal{F}_0$  durch Ändern des ersten Axiomenschemas in

$$A \rightarrow (A \rightarrow B).$$

1. Ist  $\hat{\mathcal{F}}$  vollständig?
2. Ist  $\hat{\mathcal{F}}$  korrekt?

**19. Aufgabe:** [Korrekte Regeln, 4P]

Ein Regelschema  $R_0 : \frac{A_1, \dots, A_n}{A}$  ist *korrekt* für die Aussagenlogik, wenn jede Instanz der Voraussetzungen mit Tautologien  $A_1, \dots, A_n$  zu einer Tautologie  $A(A_1, \dots, A_n)$  als Ableitung führt.

1. Zeigen Sie: Ist  $\mathcal{F} = (\text{Ax}, R)$  ein deduktives System mit korrekten Axiomen (d.h. Tautologien als Axiome) und korrekten Regeln, so ist  $\mathcal{F}$  korrekt.
2. Geben Sie eine korrekte Regel  $\frac{A_1, \dots, A_n}{A}$  mit  $A_1, \dots, A_n \not\models A$  an.

**20. Aufgabe:** [Korrektheit des Gentzen-Sequenzenkalküls, 4P]

Zeigen Sie, dass der Sequenzenkalkül korrekt ist, d.h.

$$\text{aus } \Gamma \vdash_G \Delta \text{ folgt } \Gamma \models \Delta.$$

**21. Aufgabe:** [Beweise in deduktiven Systemen, 4P]

Zeigen Sie jeweils unter Verwendung zweier verschiedener Kalküle:

1.  $(\neg(p \rightarrow q)) \vdash (q \rightarrow p)$
2.  $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee r)$  ist eine Tautologie.

**Abgabe: bis 20. Mai 2009 10:00 Uhr im Kasten neben Raum 34/401.4**

zu **Aufgabe18:**

1.  $\hat{\mathcal{F}}$  ist vollständig.

Sei  $A \in F_0$ .

$$\begin{array}{ll} B_1 \equiv B \rightarrow (B \rightarrow C) & \text{Ax1}' \\ B_2 \equiv (B \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((B \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow A) & \text{Ax1}' \\ B_3 \equiv (B \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow A & \text{MP}(B_1, B_2) \\ B_4 \equiv A & \text{MP}(B_1, B_3) \end{array}$$

Also gilt  $\vdash_{\hat{\mathcal{F}}} A$  für jedes  $A \in F_0$ . Insbesondere sind alle Tautologien herleitbar.

2.  $\hat{\mathcal{F}}$  ist nicht korrekt.

Wir haben in 1. nicht ausgenutzt, dass  $A$  Tautologie ist. Es lassen sich also nicht nur Tautologien herleiten.

zu **Aufgabe19:**

1. Der Beweis erfolgt durch Induktion über die Ableitungslänge  $l$  in  $\mathcal{F}$ .

**Induktionsanfang:**  $A$  lässt sich in  $\mathcal{F}$  in einem Schritt ableiten. Dann ist  $A$  ein Axiom, also nach Voraussetzung eine Tautologie.

**Induktionsschritt:**  $A$  lasse sich in  $\mathcal{F}$  in  $n$  Schritten ableiten und alle Aussageformen die in weniger als  $n$  Schritten ableitbar sind, seien Tautologien (**IV**).

Ist  $A$  auch in weniger als  $n$  Schritten ableitbar, so ist  $A$  nach Induktionsvoraussetzung eine Tautologie. Sei also  $A$  nicht in weniger als  $n$  Schritten ableitbar. Dann entsteht (im letzten Ableitungsschritt)  $A$  durch Anwenden einer Regel  $\frac{A_1, \dots, A_n}{A} \in R$ . Die Prämissen  $A_1, \dots, A_n$  sind in weniger als  $n$  Schritten ableitbar, also nach Induktionsvoraussetzung Tautologien. Da die Regel  $\frac{A_1, \dots, A_n}{A}$  korrekt ist, ist auch  $A$  eine Tautologie.

In  $\mathcal{F}$  sind also nur Tautologien ableitbar. D.h.  $\mathcal{F}$  ist korrekt.

- 2.

$$\frac{p_1}{p_2}$$

zu **Aufgabe20:**

Nach Aufgabe 19 genügt es zu zeigen, dass alle Regeln des Gentzen-Sequenzenkalküls korrekt sind und dass alle Axiome ebenfalls korrekt, also Tautologien sind. Dies soll hier beispielhaft für einem Axiom und eine Regel geschehen. In Bemerkung 1.27 auf Folie 66 wird erwähnt, dass Aussageformen der Art  $\{A_1, \dots, A_n\} \vdash_G \{B_1, \dots, B_m\}$  als  $(A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow (B_1 \vee \dots \vee B_m)$  interpretiert werden können.

**Axiom 1:** Um die Korrektheit von Axiom 1 zu zeigen, also  $\Gamma, A \vdash_G A, \Delta$ , muss bspw. gezeigt werden, dass  $\wedge(\Gamma \cup \{A\}) \rightarrow \vee(\{A\} \cup \Delta)$  eine Tautologie ist, also für jede Bewertung gilt. Sei  $\varphi$  eine Bewertung, so dass  $\varphi(\wedge(\Gamma \cup \{A\})) = 1$ , dann muss insbesondere  $\varphi(A) = 1$  sein. Damit gilt auch  $\varphi(\vee(\{A\} \cup \Delta)) = 1$  und es ist gezeigt, dass  $\wedge(\Gamma \cup \{A\}) \rightarrow \vee(\{A\} \cup \Delta)$  eine Tautologie ist, also dass  $\Gamma, A \vdash_G A, \Delta$  korrekt ist.

**Regel  $R_{to}$ , zweiter Teil:** Seien  $\Gamma \vdash_G A, \Delta$  und  $\Gamma, B \vdash_G \Delta$ . Das heißt, für alle Bewertungen  $\varphi$  mit  $\varphi(\wedge(\Gamma)) = 1$  gilt nach der ersten Voraussetzung, dass  $\varphi(A) = 1$  oder  $\varphi(\vee(\Delta)) = 1$ , und für alle Bewertungen  $\varphi$  mit  $\varphi(B) = 1$  und  $\varphi(\wedge(\Gamma)) = 1$  gilt nach der zweiten Voraussetzung, dass  $\varphi(\vee(\Gamma)) = 1$ .

Nun gilt für alle Bewertungen  $\psi$  mit  $\psi(A \rightarrow B) = 1$  und  $\psi(\wedge(\Gamma)) = 1$ , dass  $\psi(A) = 0$  oder  $\psi(B) = 1$ . Falls  $\psi(A) = 0$ , dann muss wegen der ersten Voraussetzung, falls  $\psi(B) = 1$ , dann wegen der zweiten Voraussetzung  $\psi(\vee(\Delta)) = 1$  gelten.

zu **Aufgabe21:**

1.  $(\neg(p \rightarrow q)) \vdash (q \rightarrow p)$

**im Sequenzenkalkül:**

1.  $p, q \vdash_G q, p$  Ax1
2.  $p \vdash_G q, q \rightarrow p$   $R_{\rightarrow,1}$
3.  $\emptyset \vdash_G p \rightarrow q, q \rightarrow p$   $R_{\rightarrow,1}$
4.  $\neg(p \rightarrow q) \vdash_G q \rightarrow p$   $R_{\rightarrow,2}$

**im Hilbertkalkül:**

1.  $\neg(p \rightarrow q)$  Prämisse
2.  $\neg(\neg p \vee q)$  Implikationsgesetz
3.  $\neg\neg p \wedge q$  De Morgan
4.  $p \wedge \neg q$  Negationsgesetz
5.  $\neg q$   $\wedge$ -Elimination
6.  $\neg q \vee p$   $\vee$ -Einführung
7.  $q \rightarrow p$  Implikationsgesetz

2.  $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee r)$  ist eine Tautologie.

**in  $F_0$ :** Genau genommen kann diese Behauptung in  $F_0$  nicht gezeigt werden, da die Formel  $\wedge$  und  $\vee$  enthält. Man könnte die äquivalente Behauptung  $\neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow (\neg p \rightarrow r)$  zeigen oder weitere Regeln einführen, um mit allen Operatoren umgehen zu können. Beides wäre aber nicht im Sinne der Aufgabenstellung, weshalb hier darauf verzichtet wird.

**im Sequenzenkalkül:**

1.  $p, q \vdash_G p, r$  Ax1
2.  $p, q \vdash_G p \vee r$   $R_{\vee}$
3.  $p \wedge q \vdash_G p \vee r$   $R_{\wedge}$
4.  $\vdash_G (p \wedge q) \rightarrow (p \vee r)$   $R_{\rightarrow,1}$

**im Hilbertkalkül:**

1.  $p \wedge q$             Prämisse
2.  $p$                      $\wedge$ -Elimination
3.  $p \vee r$                $\vee$ -Einführung
4.  $p \wedge q \vdash_H p \vee r$    Mit Deduktionstheorem aus 1. und 3..