
Übungen zur Vorlesung Logik
Blatt 3

Prof. Dr. Klaus Madlener

Abgabe bis 13. Mai 2009 10:00 Uhr

12. Aufgabe: [Substitution, Übung]Seien $A, B, C \in F$. Ferner sei $A \models B$ und A ein Teilterm von C .Beweisen Sie: Entsteht C' aus C durch Ersetzen ein oder mehrerer Vorkommen von A durch B , so gilt $C \models C'$.**13. Aufgabe:** [vollständige Operatorenmenngen, Übung]Sei der NAND-Operator (oder auch Sheffer-Strich) $|$ definiert durch

$$\varphi(A | B) := \begin{cases} 0 & \text{falls } \varphi(A) = \varphi(B) = 1 \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $\{| \}$ eine vollständige Operatormenge ist.**14. Aufgabe:** [vollständige Operatorenmenngen, 4P]Zeigen Sie, dass $\{\neg \rightarrow\}$ eine vollständige Operatormenge ist.**15. Aufgabe:** [Normalformen, 4P]

Wir definieren die konjunktive und die disjunktive Normalform (vgl. Skript S. 36ff):

- Eine aussagenlogische Formel ist in **konjunktiver Normalform (KNF)**, wenn sie eine *Konjunktion von Disjunktionen von Literalen* ist. Beispielsweise ist $A = ((p_1 \vee p_2 \vee p_3) \wedge (p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_1 \vee p_2 \vee \neg p_3))$ eine Formel in KNF.
- Eine aussagenlogische Formel ist in **disjunktiver Normalform**, wenn sie eine *Disjunktion von Konjunktionen von Literalen* ist.

Kanonische Formen (**KKNF** und **KDNF**) sind dabei solche Formen, bei denen in den inneren Dis- bzw. Konjunktionen immer alle Variablen genau einmal vorkommen. Das obige Beispiel ist also eine KKNF.

Finden Sie mit Hilfe von Wertetabellen zu den folgenden Formeln äquivalente KKNF und KDNF:

$$A_1 \equiv (p \vee q) \wedge (\neg p \wedge (p \rightarrow q))$$

$$A_2 \equiv (p \rightarrow q) \vee (q \wedge \neg r) \wedge \neg p$$

$$A_3 \equiv (q \wedge \neg r) \wedge \neg p$$

$$A_4 \equiv p \leftrightarrow (q \rightarrow p)$$

Sind die gefundenen Formeln minimale KNFs bzw. DNFs? Was sagen KNF und DNF einer Formel anschaulich aus?

16. Aufgabe: [syntaktischer Nachweis von Tautologien, 3P]

Gegeben seien die folgenden Regelschemata:

1. $\frac{A \vee \neg A}{true}$
2. $\frac{A \vee true}{true}$
3. $\frac{A \rightarrow \neg A}{\neg A}$
4. $\frac{(A \vee B) \vee C}{A \vee (B \vee C)}$
5. $\frac{A \vee B}{B \vee A}$
6. $\frac{A \rightarrow B}{\neg A \vee B}$

Dabei sei *true* eine aussagenlogische Konstante mit $\varphi(true) = 1$ für jede Bewertung φ .

a: Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen Tautologien sind, indem Sie mit Hilfe der obigen Regelschemata jeweils $A \vdash true$ herleiten.

1. $A_1 \equiv (p \vee q) \vee (q \rightarrow \neg q)$
2. $A_2 \equiv p \rightarrow (q \rightarrow p)$

17. Aufgabe: [Beweise in \mathcal{F}_0 , 6P]

Beweisen Sie die Aussageformen 7, 10 und eine weitere der Formen 8, 9 oder 11 aus Beispiel 1.22 in den Folien im deduktiven System \mathcal{F}_0 .

Abgabe: bis 13. Mai 2009 10:00 Uhr im Kasten neben Raum 34/401.4

zu **Aufgabe12:**

Der Beweis der Aussage erfolgt per Induktion über den Aufbau von C .

Induktionsanfang: Sei C atomar, d.h. $C \equiv p_i$ mit $i \in \mathbb{N}$.

Da A Teilterm von C ist, muss $A \equiv p_i$ sein. C' entsteht durch Ersetzen von A durch B , also gilt $C' \equiv B$. Nach Voraussetzung ist $A \models B$, daher gilt $C \models C'$.

Induktionsschritt: Sei C nicht atomar und die Behauptung gelte für alle Teilterme von C .

Ist $A \equiv C$, folgt die Behauptung wegen $C \equiv A \models B \equiv C'$. Sei also $A \not\equiv C$. Da C nicht atomar ist, ist C von der Form $C \equiv (\neg D)$ oder $C \equiv (D \star E)$ mit $D, E \in F$ und $\star \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$.

1. Fall: C ist von der Form $C \equiv (\neg D)$ mit $D \in F$. Dann ist $C' \equiv (\neg D')$ mit einem $D' \in F$, das aus D durch Ersetzen ein oder mehrerer Vorkommen von A (als Teilterm) durch B entsteht. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $D \models D'$, d.h. $\varphi(D) = \varphi(D')$ für jede Bewertung φ .

Sei nun φ eine Bewertung. Dann gilt

$$\varphi(C) = \varphi(\neg D) = 1 - \varphi(D) = 1 - \varphi(D') = \varphi(\neg D') = \varphi(C').$$

Dies zeigt, dass $\varphi(C) = \varphi(C')$ für jede Bewertung φ gilt, also gilt $C \models C'$.

2. Fall: C ist von der Form $C \equiv (D \star E)$ mit $D, E \in F$ und $\star \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$. Dann ist $C' \equiv (D' \star E')$ mit $D', E' \in F$. Außerdem entsteht D' (bzw. E') aus D (bzw. E) durch Ersetzen von Vorkommen von A (als Teilterm) durch B (eventuell null Vorkommen).

Betrachte D' . Entsteht D' aus D indem A nullmal ersetzt wird, gilt natürlich $D \equiv D'$. Ansonsten folgt nach Induktionsvoraussetzung $D' \models D$. In beiden Fällen gilt $D' \models D$.

Analog sieht man $E' \models E$.

Sei φ eine Bewertung. Da $D' \models D$ und $E' \models E$ gilt, ist $\varphi(D') = \varphi(D)$ und $\varphi(E') = \varphi(E)$. Es folgt

$$\varphi(C) = \varphi(E \star D) = \varphi(E' \star D') = \varphi(C').$$

Dabei wurde benutzt, dass \star extentional¹ ist. Also gilt auch hier $C \models C'$.

zu **Aufgabe13:**

Zunächst eine Vorbemerkung: Es gilt

$$\begin{aligned} \neg B &\models (B \mid B) \\ B \rightarrow C &\models B \mid (C \mid C) \end{aligned}$$

¹Alle Junktoren der Aussagenlogik sind extentional, das heißt z.B. für \vee , dass $\varphi(A \vee B)$ durch $\varphi(A)$ und $\varphi(B)$ eindeutig bestimmt ist.

Dies kann, zum Beispiel durch Aufstellen einer Wertetabelle, leicht gezeigt werden.

Beh.: Zu jedem $A \in F(\{\neg, \rightarrow\})$ gibt es ein $A' \in F(\{\}\})$ mit $A \models A'$.

Der Beweis der Behauptung folgt nun mittels Induktion über den Aufbau von A .

Induktionsanfang: Sei A atomar. Dann ist bereits $A \in F(\{\}\})$. \checkmark

Induktionsschritt: Sei A nicht atomar und für jeden Teilterm gebe es eine äquivalente Aussageform in $F(\{\}\})$. Da A nicht atomar ist, ist A von der Form $A \equiv (\neg B)$ oder $A \equiv (B \rightarrow C)$.

1. Fall: A hat die Form $A \equiv (\neg B)$ mit $B \in F(\{\neg, \rightarrow\})$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine zu B äquivalente Formel $B' \in F(\{\}\})$. Setze $A' \equiv (B' \mid B')$. Wie bereits gesagt, gilt dann

$$A \models (B \mid B).$$

Ferner ist $A' \in F(\{\}\})$. Da A' aus $(B \mid B)$ entsteht, indem jedes Vorkommen von B durch B' ersetzt wird und $B \models B'$ gilt, folgt nach Aufgabe 12

$$(B \mid B) \models A'.$$

Schließlich folgt $A \models A'$ aus der Transitivität von \models .

2. Fall: A hat die Form $A \equiv (B \rightarrow C)$ mit $B, C \in F(\{\neg, \rightarrow\})$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es zu B bzw. C äquivalente Aussageformen $B', C' \in F(\{\}\})$. Wegen der Vorbemerkung gilt

$$A \models B \mid (C \mid C).$$

Nach Aufgabe 12 gilt

$$\begin{aligned} B \mid (C \mid C) &\models B' \mid (C \mid C) \\ &\models B' \mid (C' \mid C'). \end{aligned}$$

Es folgt $A \models B' \mid (C' \mid C')$, da \models eine Äquivalenzrelation ist.

Somit gibt es zu jedem $A \in F(\{\neg, \rightarrow\})$ eine logisch äquivalente Formel $A' \in F(\{\}\})$.

Sei nun $A \in F$. Dann gibt es, da $\{\neg, \rightarrow\}$ vollständig ist, ein $A' \in F(\{\neg, \rightarrow\})$ mit $A \models A'$. Wie oben gezeigt, gibt es dann $A'' \in F(\{\}\})$ mit $A' \models A''$. Daraus folgt $A \models A''$.

Man sieht, dass es um die Vollständigkeit einer Operatormenge OP_1 zu zeigen, genügt, die Operatoren einer vollständigen Operatormenge OP_2 „nachzubauen“.

zu **Aufgabe14:**

Der Beweis erfolgt analog zu dem aus Aufgabe 13. Hier wird von der vollständigen Operatormenge $\{\neg, \vee\}$ ausgegangen und zunächst $A \vee B \models \neg B \rightarrow B$ festgehalten. Nun bleibt zu zeigen, dass es zu jedem $A \in F(\{\neg, \vee\})$ ein $A' \in F(\{\neg, \rightarrow\})$ mit $A \models A'$ gibt.

Der Beweis der Behauptung folgt nun mittels Induktion über den Aufbau von A .

Induktionsanfang: Sei A atomar. Dann ist bereits $A \in F(\{\neg \rightarrow\})$. \checkmark

Induktionsschritt: Sei A nicht atomar und für jeden Teilterm gebe es eine äquivalente Aussageform in $F(\{\neg\})$. Da A nicht atomar ist, ist A von der Form $A \equiv (\neg B)$ oder $A \equiv (B \vee C)$.

1. Fall: A hat die Form $A \equiv (\neg B)$ mit $B \in F(\{\neg, \vee\})$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine zu B äquivalente Formel $B' \in F(\{\neg \rightarrow\})$. Setze $A' \equiv \neg B'$. Dann gilt $A' \in F(\{\neg \rightarrow\})$ und mit Aufgabe 12

$$A \models \neg B \models \neg B' \models A'.$$

2. Fall: A hat die Form $A \equiv (B \vee C)$ mit $B, C \in F(\{\neg, \vee\})$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es zu B bzw. C äquivalente Aussageformen $B', C' \in F(\{\neg \rightarrow\})$. Wegen der Vorbemerkung und Aufgabe 12 gilt

$$A' := \neg B' \rightarrow C' \models B \vee C \equiv A$$

und $A' \in F(\{\neg \rightarrow\})$.

Es gibt also zu jedem $A \in F(\{\neg, \vee\})$ ein äquivalentes $A' \in F(\{\neg \rightarrow\})$. Da $\{\neg, \vee\}$ vollständig ist, ist damit auch $\{\neg \rightarrow\}$ vollständig.

zu **Aufgabe 15:**

Die Wertetabellen der Formeln A_1 und A_4 sehen folgendermaßen aus:

p	q	A_1	A_4
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	0	1.

Die KDNF einer Formel wird – wie auf Folie 39 gezeigt – gebildet, indem aus jeder erfüllten Zeile der Tabelle eine Konjunktion gebildet wird. Dabei kommt jede Variable in einer Konjunktion genau dann negiert vor, wenn ihr Wert in der entsprechenden Zeile 0 ist. Diese Konjunktionen werden dann mit \vee verknüpft. Die KDNFs von A_1 und A_4 sind die folgenden:

$$A_1 \models (\neg p \wedge q) \qquad A_4 \models (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$$

Die KDNF einer Formel gibt also anschaulich gesehen an, welche Zeilen der Tabelle erfüllt sein müssen, damit die Formel gilt. Dementsprechend gibt die KKNF an, welche Zeilen nicht erfüllt sein dürfen, damit die Formel gilt. Man kann sie daher gewinnen, indem man genau die selbe Konstruktion wie für die KDNF, jedoch mit den nicht erfüllten Zeilen macht, das Ergebnis negiert und dann die DeMorganschen Regeln anwendet:

$$\begin{aligned} A_1 \models & \neg((\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)) & A_4 \models & \neg(\neg p \wedge \neg q) \\ \models & (\neg(\neg p \wedge \neg q) \wedge \neg(p \wedge \neg q) \wedge \neg(p \wedge q)) & \models & p \vee q \\ \models & ((p \vee q) \wedge (\neg p \wedge q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)). & & \end{aligned}$$

Einfacher geht es, indem man die nichterfüllten Zeilen zu Disjunktionen zusammenfasst, wobei die Literale invertiert werden, d.h. die Variable genau dann negiert vorkommt, wenn ihr Wert in der entsprechenden Zeile 1 ist. Diese Disjunktionen werden dann zu Konjunktionen verknüpft.

Die Wertetabellen der Formeln A_2 und A_3 sehen folgendermaßen aus:

p	q	r	A_2	A_3
0	0	0	1	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	0

Die KDNFs sind entsprechend:

$$A_2 \models (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$$

und

$$A_3 \models (\neg p \wedge q \wedge \neg r).$$

Und die KKNFs sind:

$$A_2 \models (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r)$$

und

$$A_3 \models (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \\ \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$$

KKNFs und KDNFs sind in der Regel nicht minimal, da in einer Konjunktion bzw. Disjunktion immer alle Variablen vorkommen müssen.

zu **Aufgabe16:**

Beweis für A_1 :

$$\begin{array}{ll} B_1 \equiv (p \vee q) \vee (q \rightarrow \neg q) & \text{Hypothese} \\ B_2 \equiv (p \vee q) \vee \neg q & \text{Regel 3} \\ B_3 \equiv p \vee (q \vee \neg q) & \text{Regel 4} \\ B_4 \equiv p \vee \text{true} & \text{Regel 1} \\ B_5 \equiv \text{true} & \text{Regel 2.} \end{array}$$

Beweis für A_2 :

$B_1 \equiv p \rightarrow (q \rightarrow p)$	Hypothese
$B_2 \equiv p \rightarrow (\neg q \vee p)$	Regel 6
$B_3 \equiv \neg p \vee (\neg q \vee p)$	Regel 6
$B_4 \equiv (\neg q \vee p) \vee \neg p$	Regel 5
$B_5 \equiv \neg q \vee (p \vee \neg p)$	Regel 4
$B_6 \equiv \neg q \vee true$	Regel 1
$B_7 \equiv true$	Regel 2.

zu **Aufgabe17**:

2. $A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash_{\mathcal{F}_0} A \rightarrow C$ (zeige $A \rightarrow B, B \rightarrow C, A \vdash_{\mathcal{F}_0} C$):

$B_1 \equiv A$	Hypothese
$B_2 \equiv A \rightarrow B$	Hypothese
$B_3 \equiv B$	MP(B_1, B_2)
$B_4 \equiv B \rightarrow C$	Hypothese
$B_5 \equiv C$	MP(B_3, B_4)

4. $\vdash_{\mathcal{F}_0} (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$ (zeige $A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash_{\mathcal{F}_0} A \rightarrow C$) siehe bei 2.

5. $\vdash_{\mathcal{F}_0} B \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow A)$ (zeige $B, B \rightarrow A \vdash_{\mathcal{F}_0} A$) ist klar wegen Modus Ponens.

7. $\vdash_{\mathcal{F}_0} B \rightarrow \neg\neg B$ (zeige $B \vdash_{\mathcal{F}_0} \neg\neg B$)

$B_1 \equiv B$	Hypothese
$B_2 \equiv \neg\neg\neg B \rightarrow \neg B$	Theorem (siehe 3.)
$B_3 \equiv (\neg\neg\neg B \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow \neg\neg B)$	Ax3
$B_4 \equiv B \rightarrow \neg\neg B$	MP(B_2, B_3)
$B_5 \equiv \neg\neg B$	MP(B_1, B_4)

8. $\vdash_{\mathcal{F}_0} (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$ ist klar wegen Axiom 3.

$(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ (zeige $A \rightarrow B, \neg B \vdash_{\mathcal{F}_0} \neg A$)

$B_1 \equiv A \rightarrow B$	Hypothese
$B_2 \equiv \neg B$	Hypothese
$B_3 \equiv \neg\neg A \rightarrow A$	Theorem (siehe 3.)
$B_4 \equiv (\neg\neg A \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B))$	Theorem (siehe 4.)
$B_5 \equiv (A \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B)$	MP(B_3, B_4)
$B_6 \equiv (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow (A \rightarrow \neg\neg B))$	Theorem (siehe 4.)
$B_7 \equiv (B \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow (A \rightarrow \neg\neg B)$	MP(B_1, B_6)
$B_8 \equiv B \rightarrow \neg\neg B$	Theorem (siehe 7.)
$B_9 \equiv A \rightarrow \neg\neg B$	MP(B_8, B_7)
$B_{10} \equiv \neg\neg A \rightarrow \neg\neg B$	MP(B_9, B_5)
$B_{11} \equiv (\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$	Ax3
$B_{12} \equiv \neg B \rightarrow \neg A$	MP(B_{10}, B_{11})
$B_{13} \equiv \neg A$	MP(B_2, B_{12})

9. $\vdash_{\mathcal{F}_0} B \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg(B \rightarrow C))$ (zeige $B, \neg C \vdash_{\mathcal{F}_0} \neg(B \rightarrow C)$)

$B_1 \equiv B$	Hypothese
$B_2 \equiv \neg C$	Hypothese
$B_3 \equiv B \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow C)$	Theorem (siehe 5.)
$B_4 \equiv (B \rightarrow C) \rightarrow C$	MP(B_1, B_3)
$B_5 \equiv ((B \rightarrow C) \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg(B \rightarrow C))$	Theorem (siehe 8.)
$B_6 \equiv \neg C \rightarrow \neg(B \rightarrow C)$	MP(B_4, B_5)
$B_7 \equiv \neg(B \rightarrow C)$	MP(B_2, B_6)

10. $\vdash_{\mathcal{F}_0} (B \rightarrow A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow A)$ (zeige $B \rightarrow A, \neg B \rightarrow A \vdash_{\mathcal{F}_0} A$)

$B_1 \equiv B \rightarrow A$	Hypothese
$B_2 \equiv \neg B \rightarrow A$	Hypothese
$B_3 \equiv (B \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$	Theorem (s. 8.)
$B_4 \equiv \neg A \rightarrow \neg B$	MP(B_1, B_3)
$B_5 \equiv (\neg B \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg\neg B)$	Theorem (s. 8.)
$B_6 \equiv \neg A \rightarrow \neg\neg B$	MP(B_2, B_5)
$B_7 \equiv \neg\neg B \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(B \rightarrow A))$	Theorem (s. 6.)
$B_8 \equiv (\neg A \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow$ $((\neg\neg B \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(B \rightarrow A)))$ $\rightarrow (\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(B \rightarrow A))))$	Theorem (s. 4.)
$B_9 \equiv (\neg\neg B \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(B \rightarrow A)))$ $\rightarrow (\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(B \rightarrow A)))$	MP(B_6, B_8)
$B_{10} \equiv \neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(B \rightarrow A))$	MP(B_7, B_9)
$B_{11} \equiv (\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(B \rightarrow A))) \rightarrow$ $((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg(B \rightarrow A)))$	Ax2
$B_{12} \equiv (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg(B \rightarrow A))$	MP(B_{10}, B_{11})
$B_{13} \equiv \neg A \rightarrow \neg(B \rightarrow A)$	MP(B_4, B_{11})
$B_{14} \equiv (\neg A \rightarrow \neg(B \rightarrow A)) \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow A)$	Ax3
$B_{15} \equiv (B \rightarrow A) \rightarrow A$	MP(B_{13}, B_{14})
$B_{16} \equiv A$	MP(B_1, B_{15})

11. $\vdash_{\mathcal{F}_0} (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$ (zeige $A \rightarrow B, A \rightarrow \neg B \vdash_{\mathcal{F}_0} \neg A$)

$B_1 \equiv A \rightarrow B$	Hypothese
$B_2 \equiv A \rightarrow \neg B$	Hypothese
$B_3 \equiv (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$	Theorem (siehe 8.)
$B_4 \equiv \neg B \rightarrow \neg A$	MP(B_1, B_3)
$B_5 \equiv (A \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg\neg B \rightarrow \neg A)$	Theorem (siehe 8.)
$B_6 \equiv \neg\neg B \rightarrow \neg A$	MP(B_2, B_5)
$B_7 \equiv (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow ((\neg\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A)$	Theorem (siehe 10.)
$B_8 \equiv (\neg\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A$	MP(B_4, B_7)
$B_9 \equiv \neg A$	MP(B_6, B_8)