

Übungen zur Vorlesung Logik
Blatt 2

Prof. Dr. Klaus Madlener

Abgabe bis 6. Mai 2009 10:00 Uhr

7. Aufgabe: [Logische Äquivalenz, Erfüllbarkeit, Übung]Seien p, q, r und s aussagenlogische Variablen und A, B, C Formeln. Zeigen Sie:

1. $\{p, p \vee q, p \rightarrow s, r \rightarrow q\} \models q \rightarrow p$
2. $\{p, p \vee q, p \rightarrow s, r \rightarrow q\} \models s$
3. $A \models \neg(\neg A)$
4. $A \wedge (B \wedge C) \models (A \wedge B) \wedge C$
5. $A \wedge (B \vee C) \models (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
6. $\neg(A \wedge B) \models (\neg A \vee \neg B)$ und $\neg(A \vee B) \models (\neg A \wedge \neg B)$
7. $A \rightarrow B \models (\neg A) \vee B$

Welche verschiedenen Möglichkeiten gibt es, die obigen logischen Äquivalenzen zu zeigen?

8. Aufgabe: [semantische Folgerung, 4P]

Zeigen oder widerlegen Sie:

1. $\{p \wedge q, q \rightarrow r\} \models r$
2. $\{p, p \wedge q, p \rightarrow (q \rightarrow r), q \vee \neg r, \} \models q \rightarrow r$
3. $\{p, p \wedge q, p \rightarrow r, q \wedge \neg r, r \rightarrow s, (\neg q \vee r \vee \neg s) \rightarrow p\} \models (q \rightarrow r) \wedge (p \vee (r \rightarrow r))$
4. $\{p, p \rightarrow r, r \vee \neg q\} \models p \rightarrow (q \rightarrow p)$
5. $F \models q \rightarrow p \wedge (\neg(s \wedge \neg(s \vee ((q \wedge r) \rightarrow p))))$
6. $F \models p \rightarrow \neg p$
7. $\Sigma \models p_3$ mit $\Sigma := \{A \in F \mid A = (p_i \rightarrow (p_{i+1} \rightarrow (\dots \rightarrow (p_{j-1} \rightarrow p_j) \dots)))\}$, $i, j \in \mathbb{N}$ und alle p_n atomar.

9. Aufgabe: [Deduktionstheorem, 4P]

Zeigen Sie die folgende Variante des Deduktionstheorems:

$$\{A_1, \dots, A_n\} \models B \text{ gdw. } (A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow B \text{ eine Tautologie ist.}$$

10. Aufgabe: [Kompaktheitssatz, 4P]

Zeigen Sie, dass die folgende Menge erfüllbar ist:

$$\begin{aligned} \Sigma &:= \{p_1 \vee p_2, \neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3, p_2 \vee p_3, \neg p_2 \vee \neg p_3 \vee \neg p_4, \dots\} \\ &= \{p_i \vee p_{i+1} \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{\neg p_i \vee \neg p_{i+1} \vee \neg p_{i+2} \mid i \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

11. Aufgabe: [Kompaktheitssatz, 2P]

Sei $\Sigma \subseteq F$ eine unendliche Menge aussagenlogischer Formeln und seien $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \dots$ erfüllbare Teilmengen von Σ , so dass für jede endliche Teilmenge $\Sigma' \subseteq \Sigma$ $\Sigma' \subseteq \Sigma_i$ für ein $i > 0$ gilt. Ist Σ erfüllbar? Beweisen Sie Ihre Behauptung.

Abgabe: bis 6. Mai 2009 10:00 Uhr im Kasten neben Raum 34/401.4

zu **Aufgabe8:**

1. $\{p \wedge q, q \rightarrow r\} \models r$: Die Folgerung gilt genau dann, wenn $\{p \wedge q, q \rightarrow r, \neg r\}$ unerfüllbar ist (siehe z.B. Folie 28). Eine erfüllende Belegung müsste aber $q = 1$ belegen (wegen $p \wedge q$) und damit auch $r = 1$, wegen $q \rightarrow r$. Dann kann sie aber $\neg r$ nicht mehr erfüllen. Dass die Menge unerfüllbar ist, kann man sich auch mit einer Wertetabelle klarmachen.
2. $\{p, p \wedge q, p \rightarrow (q \rightarrow r), q \vee \neg r, \} \models q \rightarrow r$: Hier kann die Modus-Ponens-Regel angewendet werden (Folie 29): Es gilt schon $\{p, p \rightarrow (q \rightarrow r), \} \models q \rightarrow r$.
3. $\{p, p \wedge q, p \rightarrow r, q \wedge \neg r, r \rightarrow s, (\neg q \vee r \vee \neg s) \rightarrow p\} \models (q \rightarrow r) \wedge (p \vee (r \rightarrow r))$ Die Menge ist schon unerfüllbar, da zur Erfüllung der ersten, dritten und vierten Formel p , r und $\neg r$ gelten müssten. Aus einer unerfüllbaren Menge können alle Formeln gefolgert werden, da es ja keine erfüllenden Bewertungen für die Menge gibt, also alle erfüllenden Bewertungen auch die gefolgerte Formel erfüllen (Folie 28). Alternativ kann man auch argumentieren, dass für eine unerfüllbare Menge Σ auch $\Sigma \cup \{\neg A\}$ unerfüllbar ist.
4. $\{p, p \rightarrow r, r \vee \neg q\} \models p \rightarrow (q \rightarrow p)$: Die rechte Formel ist eine Tautologie, also von jeder Belegung erfüllt. Damit folgt sie auch aus jeder Menge.
5. $F \models q \rightarrow p \wedge (\neg(s \wedge \neg(s \vee ((q \wedge r) \rightarrow p))))$: Die Formel ist ja in F enthalten, also muss jede F erfüllende Belegung auch die Formel erfüllen. Außerdem ist F ja unerfüllbar, also kann man alles daraus folgern.
6. $F \models p \rightarrow \neg p$: Siehe oben.
7. $\Sigma \models p_3$ mit $\Sigma := \{A \in F \mid A = (p_i \rightarrow (p_{i+1} \rightarrow (\dots \rightarrow (p_{j-1} \rightarrow p_j) \dots)))\}$, $i, j \in \mathbb{N}$ und alle p_n atomar.: Σ enthält unter anderem auch jedes Atom p_n , die demnach alle mit 1 belegt werden müssen. Die Implikationen sind dann auch alle wahr, so dass die Menge genau von der Belegung $\varphi(p_n) = 1$ für $n \in \mathbb{N}$ erfüllt wird. Diese erfüllt natürlich auch p_3 . Alternativ kann man auch mit der Modus-Ponens-Regel argumentieren: Die Menge enthält p_2 und $p_2 \rightarrow p_3$, also ist p_3 eine semantische Folgerung.

zu **Aufgabe9:**

Die Aussage wird mit vollständiger Induktion über die Anzahl der Formeln in der Menge gezeigt:

Induktionsanfang: Die Behauptung $\{A_1\} \models B$ gdw. $A_1 \rightarrow B$ eine Tautologie ist folgt direkt mit $\Sigma = \emptyset$ aus dem Deduktionstheorem in der Vorlesung.

Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung gelte für alle Mengen mit n Formeln.

Induktionsbehauptung: Dann gilt die Behauptung für alle Mengen mit $n + 1$ Formeln, also $\{A_1, \dots, A_{n+1}\} \models B$ gdw. $(A_1 \wedge \dots \wedge A_{n+1}) \rightarrow B$ eine Tautologie ist.

Induktionsschritt: Mit dem Deduktionstheorem und der Induktionsvoraussetzung gilt

$$\begin{aligned} \{A_1, \dots, A_{n+1}\} \models B \text{ gdw. } \{A_1, \dots, A_n\} \models A_{n+1} \rightarrow B \\ \text{gdw. } (A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow (A_{n+1} \rightarrow B) \text{ ist Tautologie.} \end{aligned}$$

Mit den De Morganschen Regeln und $A \rightarrow B \models \neg A \vee B$ (Folie 34) folgt nun

$$\begin{aligned} (A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow (A_{n+1} \rightarrow B) &\models \neg(A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \vee (\neg A_{n+1} \vee B) \\ &\models \neg(A_1 \wedge \dots \wedge A_n \wedge A_{n+1}) \vee B \\ &\models (A_1 \wedge \dots \wedge A_{n+1}) \rightarrow B. \end{aligned}$$

zu **Aufgabe10:**

Laut Kompaktheitssatz (Folie 31) genügt es zu zeigen, dass jede endliche Teilmenge von Σ erfüllbar ist. In diesen endlichen Teilmengen kommen nur endlich viele Formeln und daher auch nur endlich viele Atome vor. Deshalb kann eine Induktion über den größten Index n eines Atoms in der Teilmenge geführt werden:

Induktionsanfang: Die leere Menge und die Menge $\{A_1 \vee A_2\}$ sind erfüllbar, damit ist die Aussage für $n \leq 2$ gezeigt.

Induktionsvoraussetzung: Alle endlichen Teilmengen von Σ , bei denen der größte Index eines Atoms n ist, sind erfüllbar.

Induktionsbehauptung: Dann sind alle endlichen $\Sigma' \subset \Sigma$, in denen $n + 1$ der größte Index eines Atoms ist, erfüllbar.

Induktionsschritt: Sei Σ' eine solche Teilmenge mit höchstem Index $n + 1$. Dann ist $\Sigma'' := \{A \in \Sigma' \mid p_{n+1} \text{ kommt nicht in } A \text{ vor}\}$ nach Induktionsvoraussetzung erfüllbar. Wenn φ'' die erfüllende Belegung für Σ'' ist, dann sei φ' wie folgt definiert:

$$\varphi'(p_i) := \begin{cases} \varphi''(p_i), & \text{falls } i \leq n \\ 1, & \text{falls } \varphi''(p_n) = 0 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $i \leq n$ ist $\varphi'(p_i) = \varphi''(p_i)$, also erfüllt φ' auch Σ'' . Außerdem erfüllt es auch $p_n \vee p_{n+1}$ und $\neg p_{n-1} \vee \neg p_n \vee \neg p_{n+1}$, da immer eines der Atome p_n und p_{n+1} erfüllt sind. Damit ist φ' eine erfüllende Belegung von Σ' .

zu **Aufgabe11:**

Jede endliche Teilmenge $\Sigma' \subset \Sigma$ ist in einer erfüllbaren (Teil-)Menge Σ_i enthalten, muss also selbst erfüllbar sein. Damit muss nach dem Kompaktheitssatz auch Σ selbst erfüllbar sein.