zu **Aufgabe1:**

1. „Menschen atmen Luft.“ist bereits atomar. (wahr)
2. „Wenn es um den Sitzplatz geht, das Alter sitzt, die Jugend steht!“:
   Es sind drei atomare Aussagen erkennbar, die auch irgendwie durch Junktoren verbunden zu sein scheinen, d.h. $A \rightarrow (B \wedge \neg C)$. Dieses Modell geht aber an der Wirklichkeit weit vorbei, zum einen ist es zu grob, um die Sachverhalte sinnvoll auszudrücken. Mit Prädikatenlogik könnte man die Sachverhalte besser darstellen, was jünger bedeutet, dass zwei Personen in einem Konflikt um einen Sitzplatz sind, was sitzen und stehen bedeuten.
   Man kann man sich leicht vorstellen, dass mit einem Gipsbein wohl doch der Jüngere den Sitzplatz bekommen würde. Also ist die Aussage unter rein aussagenlogischen Aspekten so keine Tautologie.
3. $A \equiv$ „Banknoten nachmachen“, $B \equiv$ „Banknoten verfälschen“, $C \equiv$ „sich nachgemachte Banknoten verschaffen“, $D \equiv$ „sich verfälschte Banknoten verschaffen“, $E \equiv$ „nachgemachte Banknoten in Verkehr bringen“, $F \equiv$ „verfälschte Banknoten in Verkehr bringen“und $G \equiv$ „Freiheitsstrafe nicht unter 2 Jahren erhalten“. Dieser Satz ist mehrdeutig (Klammerung?) und erlaubt mehrere unterschiedliche Repräsentationen. $((A \vee B) \vee ((C \wedge E) \vee (D \wedge F))) \rightarrow G$ ist eine Repräsentation der Aussage. Falsch ist diese Aussage, weil nicht jeder Geldfälscher überführt wird.
4. Mit $A \equiv$ „William Shakespeare schrieb ‘Moby Dick’.“, $B \equiv$ „Paris ist die Hauptstadt von Spanien.“ und $C \equiv$ „Katzen jagen Mäuse.“hat man immer noch die Wahl sich für $(A \wedge B) \vee C$ oder für $A \wedge (B \vee C)$ zu entscheiden. Im ersten Fall hat man eine wahre Aussage, im zweiten Fall eine falsche. Hier ist die Umgangssprache mehrdeutig.
5. Mit $A \equiv$ „England ist eine Insel.“und $B \equiv$ „In England regnet es oft.“lässt sich die Aussage durch $A \rightarrow B$ repräsentieren. Aber diese Repräsentation wird der ursprünglichen Aussage nicht ganz gerecht. „weil“ist nicht extentional, d.h. der Wahrheitswert einer Aussage „X weil Y“hängt nicht nur von den Wahrheitswerten der Aussagen X und Y ab. Dem Wort „weil“entspricht daher kein aussagenlogischer Junktor. Die Aussage ist falsch; es liegt ja nicht (nur) daran, dass England eine Insel ist, wenn es dort regnet. Die (schlechte) Übersetzung $A \rightarrow B$ dagegen ist wahr. (was genau heißt „oft“?)
6. „Dieser Satz hat fünf Wörter.“Die Aussage scheint atomar und offensichtlich wahr zu sein. Probleme bereitet allerdings das Wort „Dieser“: Meint die Person, von der die Aussage stammt, ihre eigene Aussage, oder ist irgendein anderer Satz gemeint? Im ersten Fall könnte man die Aussage als „Der Satz „Dieser Satz hat fünf Wörter“hat fünf Wörter “auffassen und die Aussage ist wahr. Damit wird man aber dem Wort „Dieser“nicht gerecht, das ja eigentlich einen Selbstbezug ausdrücken soll, der in der uns bekannten Syntax aber nicht ausgedrückt werden kann. Im zweiten Fall hängt es vom tatsächlich gemeinten Satz ab.

7. „Dieser Satz hat nicht fünf Wörter.“Ist die Aussage nun als Gegenteil der obigen gemeint oder ist das „Dieser “selbstbezüglich?
8. „Dieser Satz kein Verb.“ Hier kann man sich von Anfang an streiten, ob das überhaupt noch eine Aussage ist. Wenn man die stilistische Übertreibung noch als Verstärkung der Aussage mitnimmt, hängt es wieder wie im Fall zuvor von „Dieser“ ab.

Es gibt viele Aspekte der Umgangssprache, die sich nur schwer oder gar nicht in formale Aussagenlogik übersetzen lassen. Selbst wenn das möglich ist, bleibt oft unter logischen Aspekten so viel offen, dass es nicht möglich ist, den Wahrheitsgehalt festzulegen. Häufig erhält man Aussageformen, die aber erst mit Prädikatenlogik symbolisch erfasst werden können.

zu **Aufgabe2:**
Zunächst geben wir den Atomen folgende Bedeutung:

- $B \equiv$ „Bier trinken“,
- $F \equiv$ „Fisch essen“ und
- $E \equiv$ „Eiscreme essen“.

Die Aussage lässt sich als

$$A \equiv (\neg B \to F) \wedge (((B \wedge F) \to \neg E) \wedge ((E \vee \neg B) \to \neg F))$$

darstellen.
Der Wertetabelle kann man ansehen, dass diese Formel zu $B \wedge \neg(E \wedge F)$ äquivalent ist:

B	F	E	$\neg B \to F$	$(B \wedge F) \to \neg E$	$(E \vee \neg B) \to \neg F$	A
0	0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	1	1	0
0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0	0

Eine einfachere Formulierung des Diätplans lautet also: „Ich trinke zu jeder Mahlzeit Bier und esse nie Fisch und Eis zur selben Mahlzeit.“

zu **Aufgabe3:**
zu 1.

Induktionsanfang: Für die atomaren Formeln $A \in F$ gilt, dass die Anzahl der Vorkommen von „(“, „)“und der Operatoren jeweils 0 ist. Damit gilt die Behauptung für alle atomaren Formeln.

Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung gelte für alle Elemente der Teilmenge $X \subset F$.

Induktionsbehauptung: Dann gilt die Behauptung für alle Formeln, die sich in einem Schritt aus X ableiten lassen.

Induktionsschritt: Seien $A, B \in X$. Dann können in einem Schritt Formeln der Form $(\neg A)$ und $(A * B)$ abgeleitet werden. In beiden Fällen kommen zu den Klammern und Operatoren in A und B, die laut Induktionsvoraussetzung die Behauptung erfüllen noch je eine öffnende, eine schließende Klammer und ein Operator hinzu, so dass die Induktionsbehauptung gilt.

Induktionsschluss: Nach dem Induktionsprinzip gilt die Behauptung damit für alle aussagenlogischen Formeln.

zu 2.

Induktionsanfang: Jede atomare Formel $A \in F$ ist ein von $\neg$ verschiedenes Symbol.

Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung gelte für alle Elemente der Teilmenge $X \subset F$.

Induktionsbehauptung: Dann gilt die Behauptung für alle Formeln, die sich in einem Schritt aus X ableiten lassen.

Induktionsschritt: Seien $A, B \in X$. Dann können in einem Schritt Formeln der Form $(\neg A)$ und $(A * B)$ abgeleitet werden. Da die Behauptung nach Induktionsvoraussetzung für A und B gilt und diese in den abgeleiteten Formeln wieder vorkommen, enthalten auch $(\neg A)$ und $(A * B)$ jeweils mindestens ein Nicht-Negationssymbol.

Induktionsschluss: Nach dem Induktionsprinzip gilt die Behauptung damit für alle aussagenlogischen Formeln.

zu 3.

Induktionsanfang: Für die atomaren Formeln $A \in F$ gilt, dass keine Operatoren und genau eine atomare Formel vorkommt. Damit gilt die Behauptung für die atomaren Formeln.

Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung gelte für alle Elemente der Teilmenge $X \subset F$.

Induktionsbehauptung: Dann gilt die Behauptung für alle Formeln, die sich in einem Schritt aus X ableiten lassen.

Induktionsschritt: Seien $A, B \in X$. Dann können in einem Schritt Formeln der Form $(\neg A)$ und $(A \star B)$ abgeleitet werden.

Im ersten Fall bleibt die Anzahl der atomaren Formeln in der abgekleiteten Formel gleich, die Anzahl der Operatoren erhöht sich gegenüber der von A. Nach der Induktionsvoraussetzung galt die Ungleichung schon für A, also gilt sie weiterhin.

Im zweiten Fall seien o_A die Anzahl der Operatoren in A, t_A die Anzahl der atomaren Formeln in A, o_B und t_B entsprechend für B. Nach Induktionsvoraussetzung gelten $t_A - 1 \leq o_A$ und $t_B - 1 \leq o_B$. Für die zusammengesetzte Formel hat man, dass die Anzahl der atomaren Formeln $t = t_A + t_B$ ist und die Anzahl der Operatoren $o = o_A + o_B + 1$. Es gilt nun $o = o_A + o_b + 1 \geq (t_A - 1) + (t_B - 1) + 1 = (t_A + t_B - 1) = t - 1$

Induktionsschluss: Nach dem Induktionsprinzip gilt die Behauptung damit für alle aussagenlogischen Formeln.

Bemerkungen:

- In der Literatur werden Induktionsbeweise oft abgekürzt, indem nur Induktionsanfang, und Induktionsschritt hingeschrieben werden, im Extremfall bleibt nur noch der Induktionsschritt stehen. Diese Abkürzungen sind nur dann sinnvoll, wenn alles andere unmissverständlich klar ist, d.h. welcher Kalkül zugrunde liegt, was für den Induktionsanfang zu zeigen ist, was die Induktionsbehauptung und die Induktionsvoraussetzung ist.
- In der Klausur wird erwartet, dass unmissverständlich die wichtigen Teile eines Induktionsbeweises herausgestellt werden: Induktionsanfang, Induktionsvoraussetzung, Induktionsbehauptung und Induktionsschritt. Induktionsvoraussetzung und Induktionsbehauptung müssen irgendwo an geeigneter Stelle im Beweis klar formuliert auftauchen. Am einfachsten ist das mit einem Schema wie oben zu erreichen.

zu **Aufgabe4:**
zu zeigen ist: Jede aussagenlogische Formel $A \in F$ ist entweder atomar oder sie lässt sich *eindeutig* darstellen als

$$A \equiv (\neg A_1) \text{ oder } A \equiv (A_1 * A_2)$$

mit $A_1, A_2 \in F$ und $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.
Hier sind zwei verschiedene Dinge zu zeigen: Zum einen die Existenz einer solchen Darstellung, zum anderen ihre Eindeutigkeit. Die Existenz kann man durch einen Widerspruchsbeweis zeigen: Angenommen, es gäbe eine aussagenlogische Formel $A \in F$, die weder atomar ist, noch die Negation einer oder Verknüpfung zweier aussagenlogischer Formeln. Dann betrachten wir die Menge $F \setminus \{A\}$. Diese Menge enthält immer noch alle atomaren Formeln und alle Formeln der Form $\neg B$ oder $B * C$ mit $B, C \in F$ und $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, da A ja keine dieser Formen hat. Sie erfüllt also die zweite Bedingung aus der Definition der Aussagenlogischen Formeln. Außerdem ist $F \setminus \{A\} \subset F$, was aber nun dritten Bedingung widerspricht, dass F die kleinste Menge ist, die die zweite Bedingung erfüllt. Demnach muss die Annahme falsch sein und es kann keine solche Formel $A \in F$ geben.

Die Eindeutigkeit wird durch strukturelle Induktion gezeigt:

Induktionsanfang: Für die atomaren Formeln $A \in F$ ist die Aussage offensichtlich erfüllt, jedes Atom ist eindeutig.

Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung gelte für alle Elemente der Teilmenge $X \subset F$.

Induktionsbehauptung: Dann gilt die Behauptung für alle Formeln, die sich in einem Schritt aus X ableiten lassen.

Induktionsschritt: Seien $A, A', B, B' \in X$. Dann können in einem Schritt Formeln der Form $(\neg A)$ und $(A * B)$ abgeleitet werden. Angenommen, eine Formel hätte zwei verschiedene Gestalten $\neg A$ und $\neg A'$. Dann wären auch A und A' von verschiedener Gestalt, was der Induktionsvoraussetzung widersprechen würde. Hat eine Formel zwei verschiedene Gestalten $(A * B)$ und $(A' * B')$, so muss entweder A ein echter Präfix, also ein Anfangswort, von A' sein oder umgekehrt. Ein echter Präfix einer Formel ist aber gar keine Formel, da immer zumindest die letzte schließende Klamer fehlt, also ist dann entweder A oder A' keine Formel. Damit muss auch die Darstellung $(A * B)$ eindeutig sein.

Induktionsschluss: Nach dem Induktionsprinzip gilt die Behauptung damit für alle aussagenlogischen Formeln.

zu **Aufgabe5:**

1. $\varphi_1 = ((p \to q) \vee (q \to p))$ ist eine Tautologie:

p	q	$(p \to q)$	$(q \to p)$	φ_1
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

2. $\varphi_2 = ((p \to q) \wedge (q \to p))$ ist erfüllbar:

p	q	$(p \to q)$	$(q \to p)$	φ_2
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

zu **Aufgabe6:**

1. $\varphi_3 = (\neg(((p \to q) \wedge p) \to q))$ ist widerspruchsvoll:

p	q	$(p \to q)$	$((p \to q) \wedge p)$	$(((p \to q) \wedge p) \to q)$	φ_3
0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	0

2. $\varphi_4 = (\neg(((\neg p) \vee q) \wedge p) \vee q)$ ist eine Tautologie:

p	q	$((\neg p) \vee q)$	$(((\neg p) \vee q) \wedge p)$	$(\neg((\neg p) \vee q) \wedge p))$	φ_4
0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1
1	1	1	1	0	1

Macht man sich klar, dass $p \rightarrow q = \neg p \vee q$ gilt, so kann man erkennen, dass φ_4 aus φ_3 nur durch Durchführen dieser Umwandlung und weglassen der vorderen Negation entsteht. Also hätte man auch ohne die Wertetabelle zeigen können, dass φ_4 eine Tautologie ist.

3. $\varphi_5 = (p \rightarrow \neg p)$ ist erfüllbar:

p	q	φ_5
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

4. $\varphi_6 = ((\neg p) \vee q) \wedge ((\neg q) \vee r) \wedge ((\neg r) \vee p))$ ist erfüllbar:

p	q	r	$((\neg p) \vee q)$	$((\neg q) \vee r)$	$((\neg r) \vee p)$	φ_6
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	1	0
1	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1

5. $\varphi_7 = ((\neg p) \wedge q) \vee ((\neg q) \wedge r) \vee ((\neg r) \wedge p))$ ist erfüllbar:

p	q	r	$((\neg p) \wedge q)$	$((\neg q) \wedge r)$	$((\neg r) \wedge p)$	φ_7
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0