SS 2009 15. Juli 2009

Übungen zur Vorlesung Logik
Blatt 12

Prof. Dr. Klaus Madlener Abgabe bis 22. Juli 2009 10:00 Uhr

61. Aufgabe: [Klauselform, Übung]
Bringen Sie die folgende Formel in Klauselform:

$$A \equiv p(a) \rightarrow \forall x \exists y[\neg(p(x) \vee q(y,x)) \wedge \forall y[p(z)]]]$$

62. Aufgabe: [Herbrand-Modelle, Übung]
Geben Sie für die Formel A aus Aufgabe 61 sowie für ihre Klauselform ein Herbrand-Modell an.

63. Aufgabe: [MGU, Übung]
Bestimmen Sie einen MGU für

$$S = \{p(x, z, g(x, y, f(z))), p(y, f(x), w)\}$$

64. Aufgabe: [Resolution, Übung]
Beweisen Sie durch Resolution:

$$\forall x \exists z_1 \exists z_2 \forall y[(r(x) \rightarrow \neg q(y)) \wedge (r(x) \vee p(x)) \wedge (q(z_1) \vee p(x) \vee s(z_2)) \wedge \neg s(y) \wedge \neg p(z_2)]$$

ist unerfüllbar.

65. Aufgabe: [Klauselform, 4P]
Bringen Sie die folgenden Formeln in Klauselform:
$A_1 \equiv \forall x \exists y[(p(x) \rightarrow q(x,y)) \wedge \forall z[q(x,z) \rightarrow \neg p(y)]]$
$A_2 \equiv \exists x \forall y[p(b) \vee (p(x) \rightarrow q(y, f(z)))]$

66. Aufgabe: [Klauselform, 6P]

1. Was muss für die Korrektheit der Skolemisierung gezeigt werden?
2. Begründen Sie für die Schritte 1 und 7 der Skolemisierung, warum sie korrekt sind.
3. In welcher Beziehung stehen die pränexe KNF und die Klauselform?

67. Aufgabe: [Herbrand-Modelle, 4P]
Geben Sie für die Formeln aus Aufgabe 65 Herbrand-Modelle an.

68. Aufgabe: [MGU, 4P]
Bestimmen Sie MGUs für:

1. $\{p(x, f(x, y, z), g(g(y))), p(a, f(g(z), x, a), g(w))\}$
2. $\{p(x, z), p(f(y, z), g(a)), p(f(g(b), z), z)\}$

69. Aufgabe: [Resolution, 6P]
Beweisen Sie durch Resolution:

1. $\models \forall z_1[p(z_1)] \vee \neg\forall x[(p(x) \vee q(x)) \wedge \exists z_2[\neg r(z_2) \wedge (r(z_2) \vee \neg q(x))]]$
2. $\forall y[(\forall y p(y) \vee r(x)) \wedge q(x) \wedge (q(y) \vee \neg r(y)) \wedge \neg p(z)]$ ist unerfüllbar.

Abgabe: bis 22. Juli 2009 10:00 Uhr im Kasten neben Raum 34/401.4

zu **Aufgabe61:**
Bringen Sie die folgende Formel in Klauselform:

$$A \equiv p(a) \to \forall x \exists y[\neg(p(x) \vee q(y,x)) \wedge \forall y[p(z)]]$$

1. Existenzieller Abschluss:
   $\exists z[p(a) \to \forall x \exists y[\neg(p(x) \vee q(y,x)) \wedge \forall y[p(z)]]]$
2. Eliminierung überflüssiger Quantoren:
   $\exists z[p(a) \to \forall x \exists y[\neg(p(x) \vee q(y,x)) \wedge p(z)]]$
3. Umbenennung mehrfach quantifizierter Variablen:
   keine vorhanden, also nichts zu tun
4. $\to$, $\leftrightarrow$ etc. ersetzen:
   $\exists z[\neg p(a) \vee \forall x \exists y[\neg(p(x) \vee q(y,x)) \wedge p(z)]]$
5. Negationen nach innen schieben:
   $\exists z[\neg p(a) \vee \forall x \exists y[\neg p(x) \wedge \neg q(y,x) \wedge p(z)]]$
6. Quantoren auf Wirkungsbereich einschränken:
   $\neg p(a) \vee \exists z[\forall x[\neg p(x) \wedge \exists y[\neg q(y,x)]] \wedge p(z)]$
7. Existenzquantoren eliminieren, Skolemfunktionen einführen:
   $\neg p(a) \vee (\forall x[\neg p(x) \wedge \neg q(f(x),x)] \wedge p(b))$
8. Allquantoren nach links schieben:
   $\forall x[\neg p(a) \vee (\neg p(x) \wedge \neg q(f(x),x) \wedge p(b))]$
9. Matrix in KNF und vereinfachen:

$$\begin{aligned}
& \forall x[\neg p(a) \vee (\neg p(x) \wedge \neg q(f(x),x) \wedge p(b))] \\
\models\!\!\!=\!\!\!\mid\; & \forall x[\neg p(x) \wedge (\neg p(a) \vee \neg q(f(x),x)) \wedge (\neg p(a) \vee p(b))] \\
\models\!\!\!=\!\!\!\mid\; & \forall x[\neg p(x) \wedge (\neg p(a) \vee \neg q(f(x),x))] \wedge (\neg p(a) \vee p(b)) \\
\models\!\!\!=\!\!\!\mid\; & \forall x[\neg p(x) \wedge (\neg p(a) \vee \neg q(f(x),x))]
\end{aligned}$$

zu **Aufgabe62:**
Geben Sie für die Formel A aus Aufgabe 61 sowie für ihre Klauselform ein Herbrand-Modell an:

Modell für A: Es gibt keine (nicht-0-stelligen) Funktionskonstanten und nur eine Individuenkonstante. Daher ist das Herbrand-Universum $H_A = \{a\}$ und $I = (H_A, I_c, I_v)$ mit $I_c(a) = a$ (per Defninitionem), $I_c(p) = I_c(q) = \emptyset$ ist ein Herbrand-Modell.

Modell für Klauselform: Hier gibt es zusätzlich die einstellige Funktionskonstante f, so dass jetzt $H_A = \{a, f(a), f(f(a)), \ldots\}$ ist. Die Interpretation der beiden Prädikatskonstanten kann gleich bleiben, so dass I wie oben, jedoch mit dem neuen H_A ein Herbrand-Modell für die Klauselform ist. Hier kann man allerdichgs auch sehen, dass die beiden Formeln zwar erfüllbarkeitsäquivalent, aber nicht logisch äquivalent sind: Wählt man z.B. $I_c(q) = H_A \times H_A$, dann ist $q(y,x)$ immer erfüllt und damit A nicht erfüllt. Die Klauselform wird aber trotzdem erfüllt, weil hier die beiden Klauseln schon durch die gewählte p erfüllt werden.

zu **Aufgabe63:**
Bestimmen Sie einen MGU für

$$S = \{p(x, z, g(x, y, f(z))), p(y, f(x), w)\}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_0 &= \emptyset \\
S_0 &= S = \{p(\underline{x}, z, g(x, y, f(z))), p(\underline{y}, f(x), w)\} \\
D_0 &= \{x, y\} \\
\sigma_1 &= \sigma_0 \cup \{x \leftarrow y\} \\
S_1 &= S_0\sigma_1 = \{p(y, \underline{z}, g(y, y, f(z))), p(y, \underline{f(y)}, w)\} \\
D_1 &= \{z, f(y)\} \\
\sigma_2 &= \sigma_1 \cup \{z \leftarrow f(y)\} \\
S_2 &= S_1\sigma_2 = \{p(y, f(y), \underline{g(y, y, f(f(y)))}), p(y, f(y), \underline{w})\} \\
D_2 &= \{g(y, y, f(f(y))), w\} \\
\sigma_3 &= \sigma_2 \cup \{w \rightarrow g(y, y, f(f(y)))\} \\
S_3 &= S_2\sigma_3 = \{p(y, f(y), g(y, y, f(f(y))))\}
\end{aligned}$$

S_3 enthält nur noch ein Element, den allgemeinsten Unifikator für die beiden ursprünglichen Formeln.

zu **Aufgabe64:**
Beweisen Sie durch Resolution:

$$\forall x \exists z_1 \exists z_2 \forall y[(r(x) \rightarrow \neg q(y)) \wedge (r(x) \vee p(x)) \wedge (q(z_1) \vee p(x) \vee s(z_2)) \wedge \neg s(y) \wedge \neg p(z_2)]$$

ist unerfüllbar.
Zuerst bringen wir die Formel in Klauselform:

$$\begin{aligned}
&\forall x \exists z_1 \exists z_2 \forall y[(r(x) \rightarrow \neg q(y)) \wedge (r(x) \vee p(x)) \wedge (q(z_1) \vee p(x) \vee s(z_2)) \wedge \neg s(y) \wedge \neg p(z_2)] \\
\rightsquigarrow &\forall x \exists z_1 \exists z_2 \forall y[(\neg r(x) \vee \neg q(y)) \wedge (r(x) \vee p(x)) \wedge (q(z_1) \vee p(x) \vee s(z_2)) \wedge \neg s(y) \wedge \neg p(z_2)] \\
\rightsquigarrow &\forall x \forall y[(\neg r(x) \vee \neg q(y)) \wedge (r(x) \vee p(x)) \wedge (q(f(x)) \vee p(x) \vee s(g(x))) \wedge \neg s(y) \wedge \neg p(g(x))]
\end{aligned}$$

Dies entspricht der Klauselmenge

$$\{\{\neg r(x), \neg q(y)\}, \{r(x), p(x)\}, \{q(f(x)), p(x), s(g(x))\}, \{\neg s(y)\}, \{\neg p(g(x))\}\}$$

Der Resolutionsbeweis ist der folgende:

$K_1 = \{\neg r(x), \neg q(y)\},$	Klauselmenge
$K_2 = \{r(x), p(x)\},$	Klauselmenge
$K_3 = \{\neg q(y), p(x)\}$	$\mathrm{Res}(K_1, K_2)$
$K_4 = \{q(f(x)), p(x), s(g(x))\},$	Klauselmenge
$K_5 = \{\neg s(y)\},$	Klauselmenge
$K_6 = \{q(f(x)), p(x)\}$	$\mathrm{Res}(\mathrm{K}_4, \mathrm{K}_5)$ mit $g(x) \leftarrow y$
$K_7 = \{p(x)\}$	$\mathrm{Res}(\mathrm{K}_3, \mathrm{K}_6)$ mit $f(x) \leftarrow y$
$K_8 = \{\neg p(g(y))\}$	Klauselmenge
$K_9 = \Box$	$\mathrm{Res}(\mathrm{K}_7, \mathrm{K}_8)$ mit $g(y) \leftarrow x.$

zu **Aufgabe65:**
Bringen Sie die folgenden Formeln in Klauselform:
$A_1 \equiv \forall x \exists y[(p(x) \rightarrow q(x,y)) \wedge \forall z[q(x,z) \rightarrow \neg p(y)]]$:

1. Existenzieller Abschluss: Nichts zu tun.
2. Eliminierung überflüssiger Quantoren: Nichts zu tun.
3. Umbenennung mehrfach quantifizierter Variablen: Nichts zu tun.
4. $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ etc. ersetzen:
   $\forall x \exists y[(\neg p(x) \vee q(x,y)) \wedge \forall z[\neg q(x,z) \vee \neg p(y)]]$
5. Negationen nach innen schieben: Nichts zu tun.
6. Quantoren auf Wirkungsbereich einschränken:
   $\forall x \exists y[(\neg p(x) \vee q(x,y)) \wedge \forall z \neg q(x,z) \vee \neg p(y)]$
7. Existenzquantoren eliminieren, Skolemfunktionen einführen:
   $\forall x[(\neg p(x) \vee q(x,f(x))) \wedge \forall z \neg q(x,z) \vee \neg p(f(x))]$
8. Allquantoren nach links schieben:
   $\forall x \forall z[(\neg p(x) \vee q(x,f(x))) \wedge \neg q(x,z) \vee \neg p(f(x))]$
9. Matrix in KNF und vereinfachen:

$$\begin{aligned} & \forall x \forall z[(\neg p(x) \vee q(x,f(x))) \wedge \neg q(x,z) \vee \neg p(f(x))] \\ \models\!\!\!\dashv\; & \forall x \forall z[(\neg p(x) \vee q(x,f(x)) \vee \neg p(f(x))) \wedge (\neg q(x,z) \vee \neg p(f(x)))] \end{aligned}$$

$A_2 \equiv \exists x \forall y[p(b) \vee (p(x) \rightarrow q(y,f(z)))]$

1. Existenzieller Abschluss:
   $\exists z \exists x \forall y[p(b) \vee (p(x) \rightarrow q(y,f(z)))]$
2. Eliminierung überflüssiger Quantoren: Nichts zu tun.
3. Umbenennung mehrfach quantifizierter Variablen: Nichts zu tun.
4. $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ etc. ersetzen:
   $\exists z \exists x \forall y[p(b) \vee \neg p(x) \vee q(y,f(z))]$
5. Negationen nach innen schieben: Nichts zu tun.
6. Quantoren auf Wirkungsbereich einschränken:
   $p(b) \vee \exists x[\neg p(x)] \vee \exists z \forall y q(y,f(z))$

7. Existenzquantoren eliminieren, Skolemfunktionen einführen:
   $p(b) \lor \neg p(a) \lor \forall y q(y, f(c))$
8. Allquantoren nach links schieben:
   $\forall y[p(b) \lor \neg p(a) \lor q(y, f(c))]$
9. Matrix in KNF und vereinfachen: Nichts zu tun.

zu **Aufgabe66:**

1. Was muss für die Korrektheit der Skolemisierung gezeigt werden?
   - Entscheidend ist die Erfüllbarkeitsäquivalenz. Die Klauselform A' von A ist erfüllbar, genau dann, wenn A erfüllbar ist.
2. Begründen Sie für die Schritte 1 und 7 der Skolemisierung, warum sie korrekt sind.
   - Schritt 1 führt dazu, dass ganz außen Existenzquantoren eingeführt werden, die dann später durch 0-stellige Konstanten wieder beseitigt werden. Eine erfüllende Interpretation von A muss die freien Variablen belegen. Eine erfüllende Interpretation von A' kann einfach gewonnen werden, indem man die neu eingeführten Konstanten entsprechend belegt. Umgekehrt geht das natürlich auch.
   - Schritt 7 ist der Kern der Transformation. Wesentlich ist die Eigenschaft, dass die neu eingeführten Funktionssymbole als Funktionen interpretiert werden, die genau das Element liefern, das zu den allquantifizierten Variablen passt, die an der betreffenden Stelle gültig sind.
3. In welcher Beziehung stehen die pränexe KNF und die Klauselform?
   - Die pränexe KNF ist eine logisch äquivalente Umformung, die Klauselform erfüllbarkeitsäquivalent. Es wäre ein Nachteil, zuerst in die pränexe KNF umzuwandeln, und dann erst in Klauselform, weil die Umformung in KNF zu einer kombinatorischen Explosion führen kann, d.h. man sollte sie möglichst spät machen.

zu **Aufgabe67:**
Geben Sie für die Formeln aus Aufgabe 65 Herbrand-Modelle an.

$A_1 \equiv \forall x \exists y[(p(x) \to q(x,y)) \land \forall z[q(x,z) \to \neg p(y)]]$:
Es kommen keine Konstanten und keine Funktionssymbole vor. Also führen wir ein Konstantensymbol ein und das Herbrand-Universum ist $H_{A_1} = \{a\}$. Wählt man $p = \{a\}$, so ist die Formel erfüllt.

$A_2 \equiv \exists x \forall y[p(b) \lor (p(x) \to q(y, f(z)))]$ Hier kommen b und f vor, so dass $H_{A_2} = \{b, f(b), f(f(b)), \ldots\}$ ist. Die Formel wird z.B. durch $p = \{b\}$ erfüllt.

zu **Aufgabe68:**
Bestimmen Sie MGUs für:

1. $\{p(x, f(x, y, z), g(g(y))), p(a, f(g(z), x, a), g(w))\}$:

$$\begin{aligned}
\sigma_0 &= \emptyset \\
S_0 &= \{p(\underline{x}, f(x, y, z), g(g(y))), p(\underline{a}, f(g(z), x, a), g(w))\} \\
D_0 &= \{x, a\} \\
\sigma_1 &= \sigma_0 \cup \{x \leftarrow a\} \\
S_1 &= S_0\sigma_1 = \{p(a, f(\underline{a}, y, z), g(g(y))), p(a, f(\underline{g(z)}, x, a), g(w))\} \\
D_1 &= \{a, g(z)\}
\end{aligned}$$

a und $g(z)$ sind nicht unifizierbar, also gibt es keinen MGU.

2. $\{p(x, z), p(f(y, z), g(a)), p(f(g(b), z), z)\}$:

$$\begin{aligned}
\sigma_0 &= \emptyset \\
S_0 &= \{p(\underline{x}, z), p(\underline{f(y, z)}, g(a)), p(f(g(b), z), z)\} \\
D_0 &= \{x, f(y, z)\} \\
\sigma_1 &= \{x \leftarrow f(y, z)\} \\
S_1 &= S_0\sigma_1 = \{p(f(y, z), \underline{z}), p(f(y, z), \underline{g(a)}), p(f(g(b), g(a)), z)\} \\
D_1 &= \{z, g(a)\} \\
\sigma_2 &= \{z \leftarrow g(a)\} \\
S_2 &= S_1\sigma_2 = \{p(f(\underline{y}, g(a)), g(a)), p(f(\underline{g(b)}, g(a)), g(a))\} \\
D_2 &= \{y, g(b)\} \\
\sigma_3 &= \{y \leftarrow g(b)\} \\
S_3 &= S_2\sigma_3 = \{p(f(g(b), g(a)), g(a))\}
\end{aligned}$$

S_3 enthält nur noch ein Element, den allgemeinsten Unifikator für die beiden ursprünglichen Formeln.

zu **Aufgabe69:**
Beweisen Sie durch Resolution:

1. $\models \forall z_1[p(z_1)] \vee \neg\forall x[(p(x) \vee q(x)) \wedge \exists z_2[\neg r(z_2) \wedge (r(z_2) \vee \neg q(x))]]$ Zuerst negieren wir die Formel, bringen sie in Klauselform und stellen Sie als Klauselmenge dar:

$$\begin{aligned}
&\neg(\forall z_1[p(z_1)] \vee \neg\forall x[(p(x) \vee q(x)) \wedge \exists z_2[\neg r(z_2) \wedge (r(z_2) \vee \neg q(x))]]) \\
\rightsquigarrow &\exists z_1[\neg p(z_1)] \wedge \forall x[(p(x) \vee q(x)) \wedge \exists z_2[\neg r(z_2) \wedge (r(z_2) \vee \neg q(x))]] \\
\rightsquigarrow &\neg p(a) \wedge \forall x[(p(x) \vee q(x)) \wedge \neg r(f(x)) \wedge (r(f(x)) \vee \neg q(x))] \\
\rightsquigarrow &\forall x[\neg p(a) \wedge (p(x) \vee q(x)) \wedge \neg r(f(x)) \wedge (r(f(x)) \vee \neg q(x))] \\
\rightsquigarrow &\{\{\neg p(a)\}, \{p(x), q(x)\}, \{\neg r(f(x))\}, \{r(f(x)), \neg q(x)\}
\end{aligned}$$

Der Resolutionsbeweis ist der folgende:

$$
\begin{array}{ll}
K_1 = \{\neg p(a)\}, & \text{Klauselmenge} \\
K_2 = \{p(x), q(x)\}, & \text{Klauselmenge} \\
K_3 = \{q(x)\} & \text{Res}(K_1, K_2) \text{ mit } a \leftarrow x \\
K_4 = \{\neg r(f(x))\}, & \text{Klauselmenge} \\
K_5 = \{r(f(x)), \neg q(x)\}, & \text{Klauselmenge} \\
K_6 = \{\neg q(x)\} & \text{Res}(\mathrm{K}_4, \mathrm{K}_5) \\
K_7 = \square & \text{Res}(\mathrm{K}_5, \mathrm{K}_6).
\end{array}
$$

2. $\forall y[(\forall y p(y) \vee r(x)) \wedge q(x) \wedge (q(y) \vee \neg r(y)) \wedge \neg p(z)]$ ist unerfüllbar. Formel in Klauselform bringen und als Klauselmenge schreiben:

$$
\begin{aligned}
&\forall y[(\forall y p(y) \vee r(x)) \wedge q(x) \wedge (q(y) \vee \neg r(y)) \wedge \neg p(z)] \\
\rightsquigarrow &\exists x \exists z \forall y[(\forall y p(y) \vee r(x)) \wedge q(x) \wedge (q(y) \vee \neg r(y)) \wedge \neg p(z)] \\
\rightsquigarrow &\exists x \exists z \forall y[(\forall y_1 p(y_1) \vee r(x)) \wedge q(x) \wedge (q(y) \vee \neg r(y)) \wedge \neg p(z)] \\
\rightsquigarrow &\exists x[(\forall y_1 p(y_1) \vee r(x)) \wedge q(x)] \wedge \forall y[q(y) \vee \neg r(y)] \wedge \exists z \neg p(z) \\
\rightsquigarrow &(\forall y_1 p(y_1) \vee r(a)) \wedge q(a) \wedge \forall y[q(y) \vee \neg r(y)] \wedge \neg p(b) \\
\rightsquigarrow &\forall y \forall y_1[(p(y_1) \vee r(a)) \wedge q(a) \wedge (q(y) \vee \neg r(y)) \wedge \neg p(b)] \\
\rightsquigarrow &\{\{p(y_1), r(a)\}, \{q(a)\}, \{q(y), \neg r(y)\}, \{\neg p(b)\}\}
\end{aligned}
$$

Resolutionsbeweis:

$$
\begin{array}{ll}
K_1 = \{p(y_1), r(a)\}, & \text{Klauselmenge} \\
K_2 = \{\neg p(b)\}, & \text{Klauselmenge} \\
K_3 = \{r(a)\} & \text{Res}(K_1, K_2) \text{ mit } a \leftarrow y_1 \\
K_4 = \{q(y), \neg r(y)\}, & \text{Klauselmenge} \\
K_5 = \{q(y)\} & \text{Res}(K_3, K_4) \text{ mit } a \leftarrow y \\
K_6 = \{q(a)\}, & \text{Klauselmenge} \\
K_7 = \square & \text{Res}(K_5, K_6) \text{ mit } a \leftarrow y.
\end{array}
$$