SS 2009 1. Juli 2009

Übungen zur Vorlesung Logik
Blatt 10

Prof. Dr. Klaus Madlener Abgabe bis 8. Juli 2009 10:00 Uhr

49. Aufgabe: [endliche und unendliche Modelle, Übung]

1. Definieren Sie eine Formel A_n der Prädikatenlogik erster Stufe, so dass jedes Modell von A_n genau n Elemente hat. Genauer ist damit gemeint, dass in jeder Interpretation $I = (D, I_C, I_V)$, die A_n erfüllt, der Definitionsbereich D genau n Elemente hat.
2. Definieren Sie eine Formel A_∞ der Prädikatenlogik erster Stufe, so dass jedes Modell von A_∞ unendlich viele Elemente hat.

50. Aufgabe: [PKNF, PDNF, 2+2P]
Bringen Sie A_1 in PKNF und A_2 in PDNF:

$A_1 \equiv \forall x[p(x) \to q(f(b)) \vee \forall y \exists z[r(f(x), g(z)) \to (p(z) \wedge r(z, x))]]$

$A_2 \equiv \forall x \forall y[(p(x) \to q(z)) \to \exists z[r(x, z) \leftrightarrow q(x)]]$

51. Aufgabe: [Kompaktheitssatz in PL2, 4P]
Zeigen Sie, dass der Kompaktheitssatz nicht für die Prädikatenlogik 2. Stufe gilt. Hinweis: Gehen Sie von Aufgabe 49 aus und entwickeln Sie Ihre Formeln ggf. weiter.

52. Aufgabe: [Herleitungen in $\mathcal{F}$, 2+2P]
Zeigen Sie:

1. $\forall x[p(x, y)],\ y = z \vdash_{\mathcal{F}} \forall x[p(x, z)]$.
2. $\forall x[p(x) \to q(x)], \forall x[p(x)] \vdash_{\mathcal{F}} q(f(a))$

53. Aufgabe: [Korrektheit von $\mathcal{F}'$, 4+1P]

1. Zeigen Sie die Korrektheit der Generalisierungsregel.
2. In der Vorlesung wurde erwähnt, dass die Aussage $\Sigma \vdash_{\mathcal{F}'} A \rightsquigarrow \Sigma \vdash_{\mathcal{F}} A$ im Allgemeinen *nicht* gilt. Dies bedeutet, dass nicht alle logischen Folgerungen aus Σ, die in $\mathcal{F}'$ hergeleitet werden können, auch in $\mathcal{F}$ hergeleitet werden können. Warum steht dieses Ergebnis nicht im Widerspruch zur Korrektheit beider Kalküle?

54. Aufgabe: [Theorien, 3+3P]
Zeigen oder widerlegen Sie:

1. Sei M eine Theorie erster Stufe. Es gibt ein Modell I mit $I \models M$ genau dann, wenn M konsistent ist.
2. Falls T eine konsistente, nicht vollständige Theorie erster Stufe ist, dann gibt es eine Formel A, so dass $T \cup \{A\}$ und $T \cup \{\neg A\}$ beide konsistente Theorien sind.

Abgabe: bis 8. Juli 2009 10:00 Uhr im Kasten neben Raum 34/401.4

zu **Aufgabe49:**

1. Definieren Sie eine Formel A_n der Prädikatenlogik erster Stufe, so dass jedes Modell von A_n genau n Elemente hat:

   Wir definieren zuerst eine Hilfsformel $A_{\geq n}$, deren Modelle mindestens n Elemente haben müssen. Mit dieser kann eine zweite Hilfsformel $A_{\leq n} :\equiv \neg A_{\geq n+1}$ definiert und schließlich A_n als die Konjunktion beider Hilfsformeln definiert werden. Die Idee bei $A_{\geq n}$ ist einfach, die Existenz n verschiedener Elemente zu fordern. Setze also

   $$\begin{aligned} A_{\geq n} :\equiv \exists x_1 \cdots \exists x_n (\quad & x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \neq x_3 \wedge \cdots \wedge x_1 \neq x_n \\ & \wedge x_2 \neq x_3 \wedge \cdots \wedge x_2 \neq x_n \\ & \vdots \\ & \wedge x_{n-1} \neq x_n). \end{aligned}$$

   Eine Interpretation $I = (D, I_c, I_v)$ ist genau dann Modell von $A_{\geq n}$, wenn es $d_1, \ldots, d_n \in D$ gibt, die paarweise verschieden sind. Also gilt $I \models \varphi_{\geq n}$ genau dann, wenn D eine n-elementige Teilmenge enthält, also mindestens n Elemente hat.

   Setze nun $A_{\leq n} :\equiv \neg A_{\geq n+1}$. Dann ist $I = (D, I_c, I_v)$ genau dann ein Modell von $\varphi_{\leq n}$, wenn I kein Modell von $\varphi_{\geq n+1}$ ist; also genau dann, wenn D nicht mindestens $n+1$ Elemente enthält. Also ist I genau dann ein Modell von $\varphi_{\leq n}$, wenn D höchstens n Elemente enthält.

   Setze nun $A_n :\equiv A_{\geq n} \wedge A_{\leq n}$. Ein Modell dieser Formel muss gleichzeitig midestens und höchstens n Elemente haben, also genau n Elemente.

2. Definieren Sie eine Formel A_∞ der Prädikatenlogik erster Stufe, so dass jedes Modell von A_∞ unendlich viele Elemente hat:

   Hier kann leider nicht analog zu oben vorgegangen werden, d.h. man kann nicht durch irgendeine Formel erzwingen, dass es unendlich viele paarweise verschiedene Elemente gibt. Dazu müsste eine Formel nach obigem Schema unendlich lang sein. Die Unendlichkeit der Trägermenge D wird daher auf indirekte Weise erzwungen. Die Idee ist, mit der Formel eine Eigenschaft der Trägermenge zu beschreiben, die endliche Mengen einfach nicht haben. Eine solche Eigenschaft ist z.B. die Existenz von Funktionen, die injektiv, aber nicht surjektiv sind oder umgekehrt. In endlichen Mengen ist nämlich jede Funktion genau dann injektiv, wenn sie auch surjektiv ist. Wenn wir also eine Funktion beschreiben, entweder injektiv oder surjektiv ist, dann muss D unendlich sein. Damit kann A_∞ z.B. wie folgt definiert werden:

   $$A_\infty :\equiv \neg \underbrace{(\forall x \forall y [f(x) = f(y) \rightarrow x = y])}_{I_c(f) \text{ injektiv}} \leftrightarrow \underbrace{(\forall x \exists y [f(y) = x])}_{I_c(f) \text{ surjektiv}}.$$

Bei dieser Formel ist zu beachten, dass die Negation – anders als bei den oben definierten Formeln – nicht automatisch einen endlichen Definitionsbereich hat: A_∞ fordert nur, dass die Funktion $I_c(f)$ entweder injektiv oder surjektiv ist und $\neg A_\infty$ würde dann nur bedeuten, dass sie entweder beides oder nichts ist. Auf einer unendlichen Trägermenge gibt es aber durchaus Funktionen, die weder injektiv noch surjektiv sind, ebenso wie es bijektive Funktionen gibt, so dass die Trägermenge durchaus unendlich sein könnte. Um auf diese Art und Weise eine Formel zu definieren, die auf jeden Fall einen endlichen Definitionsbereich hat, muss eine Formel der Prädikatenlogik 2. Stufe bemüht werden (siehe Aufgabe 51).

Eine andere solche Eigenschaft unendlicher Mengen wäre die Existenz einer Ordnungsrelation mit unendlichen aufsteigenden Ketten. Man kann also z.B. ein Prädikat „<“ einführen und seine Eigenschaften axiomatisch beschreiben.

zu **Aufgabe50:**
$A_1 \equiv \forall x[p(x) \to q(f(b)) \vee \forall y \exists z[r(f(x), g(z)) \to (p(z) \wedge r(z,x))]]$:

$$\begin{aligned}
A_1 &\equiv \forall x[p(x) \to q(f(b)) \vee \forall y \exists z[r(f(x), g(z)) \to (p(z) \wedge r(z,x))]] \\
&\models\!\!\!\!\dashv \forall x[p(x) \to q(f(b)) \vee \exists z[r(f(x), g(z)) \to (p(z) \wedge r(z,x))]] \\
&\models\!\!\!\!\dashv \forall x[\neg p(x) \vee q(f(b)) \vee \exists z[\neg r(f(x), g(z)) \vee (p(z) \wedge r(z,x))]] \\
&\models\!\!\!\!\dashv \forall x \exists z[\neg p(x) \vee q(f(b)) \vee \neg r(f(x), g(z)) \vee (p(z) \wedge r(z,x))] \\
&\models\!\!\!\!\dashv \forall x \exists z[\quad (\neg p(x) \vee q(f(b)) \vee \neg r(f(x), g(z)) \vee p(z)) \\
&\qquad\qquad\quad \wedge (\neg p(x) \vee q(f(b)) \vee \neg r(f(x), g(z)) \vee r(z,x))]
\end{aligned}$$

$A_2 \equiv \forall x \forall y[(p(x) \to q(z)) \to \exists z[r(x,z) \leftrightarrow q(x)]]$:

$$\begin{aligned}
A_2 &\equiv \forall x \forall y[(p(x) \to q(z)) \to \exists z[r(x,z) \leftrightarrow q(x)]] \\
&\models\!\!\!\!\dashv \forall x[(p(x) \to q(z)) \to \exists z[r(x,z) \leftrightarrow q(x)]] \\
&\models\!\!\!\!\dashv \forall x[(p(x) \to q(z)) \to \exists z'[r(x,z') \leftrightarrow q(x)]] \\
&\models\!\!\!\!\dashv \forall x[\neg(\neg p(x) \vee q(z)) \vee \exists z'[(r(x,z') \wedge q(x)) \vee (\neg r(x,z') \wedge \neg q(x))]] \\
&\models\!\!\!\!\dashv \forall x[(p(x) \wedge \neg q(z)) \vee \exists z'[(r(x,z') \wedge q(x)) \vee (\neg r(x,z') \wedge \neg q(x))]] \\
&\models\!\!\!\!\dashv \forall x \exists z'[(p(x) \wedge \neg q(z)) \vee (r(x,z') \wedge q(x)) \vee (\neg r(x,z') \wedge \neg q(x))]
\end{aligned}$$

Soweit notwendig sind die Schritte von Folie 188 in der dort angegebenen Reihenfolge durchgeführt worden.

zu **Aufgabe51:**
Betrachte die Menge $\Sigma = \{\neg A'_\infty, A_n \mid n \geq 1\}$ mit

$$A'_\infty :\equiv \exists F \neg(\forall x \forall y[F(x) = F(y) \to x = y]) \leftrightarrow (\forall x \exists y[F(y) = x]).$$

und

$$A_n \text{ wie in Aufgabe 49}$$

Damit $\neg A'_\infty$ erfüllt ist, muss das Modell endlich sein, damit *jedes* A_n erfüllt ist, muss das Modell jedoch unendlich sein. Wäre nämlich $|D| = n$, so würde nicht $I \models A_{n+1}$ gelten. Also ist Σ unerfüllbar. Jede endliche Teilmenge ist aber erfüllbar, da diese nur Formeln A_n bis zu einem *maximalen* n enthält. Jede Interpretation mit $|D| \geq n$ erfüllt diese endliche Teilmenge von Σ. Damit ist Σ selbst also unerfüllbar, jede endliche Teilmenge aber erfüllbar, was dem Kompaktheitssatz widerspricht.

Der Unterschied zwischen A_∞ aus Aufgabe 49 und A'_∞ hier ist, dass in letzterer Formel über F quantifiziert wird. Während bei A_∞ also über eine ganz konkrete Funktion geredet wird, wird hier allgemeiner die Existenz einer Funktion gefordert, die entweder injektiv oder surjektiv ist. Im Fall A'_∞ bzw. A_∞ macht dies, was das Modell angeht, keinen Unterschied, in beiden Fällen muss das Modell unendlich sein. Jedes Modell von $\neg A'_\infty$ muss jedoch endlich sein, da diese Formel nun wirklich bedeutet, dass jede Funktion über D genau dann injektiv ist, wenn sie surjektiv ist, was nur in endlichen Mengen der Fall ist.

zu **Aufgabe52:**

1. $\forall x[p(x,y)],\ y = z \vdash_{\mathcal{F}} \forall x[p(x,z)]$:

$$
\begin{array}{ll}
B_1 \equiv \forall x[p(x,y)] & \text{Hypothese} \\
B_2 \equiv y = z & \text{Hypothese} \\
B_3 \equiv y = z \rightarrow (\forall x[p(x,y)] \rightarrow \forall x[p(x,z)]) & \text{Ax8} \\
B_4 \equiv \forall x[p(x,y)] \rightarrow \forall x[p(x,z)] & \text{MP}(B_2, B_3) \\
B_5 \equiv \forall x[p(x,z)] & \text{MP}(B_1, B_4)
\end{array}
$$

2. $\forall x[p(x) \rightarrow q(x)], \forall x[p(x)] \vdash_{\mathcal{F}} q(f(a))$:

$$
\begin{array}{ll}
B_1 \equiv \forall x[p(x) \rightarrow q(x)] & \text{Hypothese} \\
B_2 \equiv \forall x[p(x)] & \text{Hypothese} \\
B_3 \equiv (\forall x[p(x) \rightarrow q(x)]) \rightarrow (\forall x[p(x)] \rightarrow \forall x[q(x)]) & \text{Ax8} \\
B_4 \equiv \forall x[p(x)] \rightarrow \forall x[q(x)] & \text{MP}(B_1, B_3) \\
B_5 \equiv \forall x[q(x)] & \text{MP}(B_2, B_4) \\
B_6 \equiv \forall x[q(x)] \rightarrow q(f(a)) & \text{Ax4} \\
B_7 \equiv q(f(a)) & \text{MP}(B_5, B_6)
\end{array}
$$

zu **Aufgabe53:**

1. Es ist zu zeigen, dass $\forall xA$ eine Tautologie ist, wenn A eine Tautologie ist. Sei also A eine Tautologie. Das heißt, $I \models A$ für *jede* Interpretation I. Insbesondere erfüllt jedes I die Formel A unabhängig davon, wie x interpretiert wird, also gilt $I^{x,d} \models A$ für *alle* $d \in D$ und alle Interpretationen I. Dies wiederum bedeutet $I \models \forall xA$ für alle Interpretationen I.

   Nur die Aussage $A \models \forall xA$ zu zeigen hätte hier, anders als in den bisher kennengelernten Fällen, nicht genügt, da diese Aussage i.A. nicht gilt.

2. Die Korrektheit eines Kalküls ist weiterhin nur über die Tautologien definiert und für Tautologien gilt die Aussage, wie oben gezeigt. D.h. jedes Theorem in F' ist tatsächlich eine Tautologie. Eine Konsequenz aus der Tatsache, dass $\Sigma \vdash_{\mathcal{F}'} A \rightsquigarrow \Sigma \vdash_{\mathcal{F}} A$ im Allgemeinen nicht gilt, ist, dass das Deduktionstheorem in F' nur unter Einschränkungen gilt (vgl. Folie 207).

zu **Aufgabe54:**

1. Wenn es ein Modell gibt, dann kann M nicht inkonsistent sein. Also eine Richtung gezeigt.

   Wenn M konsistent ist, und eine Theorie ist, dann gilt nach dem Vollständigkeitssatz 4.10, dass M erfüllbar ist, also gibt es ein Modell I mit $I \models M$.

2. Die Aussageform, dass es eine Formel A gibt, so dass $T \cup \{A\}$ und $T \cup \{\neg A\}$ beide konsistente Theorien sind, ist falsch.

   Angenommen, beide sind konsistente Theorien. $\neg\neg A$ ist logisch Äquivalent zu A, also müsste $\neg\neg A \in T \cup \{A\}$ gelten, d.h. $\neg\neg A \in T$. Da $\neg\neg A \to A \in \text{Taut} \subset T$ und T Theorie folgt $A \in T$, und damit $T \cup \{\neg A\}$ inkonsistent. Widerspruch

   Zum Widerlegen der gesamten Aussage brauchen wir nur noch eine konsistente, nicht vollständige Theorie. Das kann keine Relationalstruktur sein, also sind Formeln mit freien Variablen enthalten, was erlaubt ist.