Übungen zur Vorlesung Logik

Prof. Dr. Klaus Madlener Blatt 11

41. Aufgabe: [F, ohne Punkte]
Finden Sie einen Beweis im deduktiven System $\mathcal{F}$ für folgende Formeln:

1. $\forall x A \to \forall y\ A_x[y]$, falls $A_x[y]$ eine erlaubte Substitution ist und y nicht frei in A vorkommt,
2. $\forall x\ (A \to B) \to (A \to \forall x\ B)$, falls x nicht frei in A vorkommt,
3. $\forall x \forall y\ A \to \forall x A_y[x]$, falls $A_y[x]$ eine erlaubte Substitution ist,
4. $\forall x\ A \to (\forall x\ (A \to B) \to \forall x\ B)$
5. $\forall x \forall y\ A \to (\forall x \forall y\ (A \to B) \to \forall x \forall y\ B)$
6. $\forall x\ s = t \to \forall x\ t = s$,
7. $\forall x\ r = s \to (\forall x\ s = t \to \forall x\ r = t)$.

42. Aufgabe: [F und Existenzquantor, 5P]
Entwickeln Sie Axiome, mit deren Hilfe es möglich wird, auch Formeln mit dem Existenzquantor im deduktiven System $\mathcal{F}$ zu behandeln. Begründen Sie die Korrektheit und Vollständigkeit des so entstandenen Kalküls. Beachten Sie Beispiel 4.6 auf Folie 203.

43. Aufgabe: [Beispiele in F, 15P]
Zeigen Sie folgende Aussagen:

1. $\vdash_{\mathcal{F}} \forall x \forall y\ A \to \forall y \forall x\ A$,. Beschreiben Sie, wie man den Beweis verwenden kann, um vergleichbare Aussagen für beliebige Vertauschungen (Permutationen) von mehr als zwei aufeinander folgenden Variablen zu beweisen.
2. $\vdash_{\mathcal{F}}\ \exists y\ A_x[y] \to \exists x\ A$, wobei y nicht frei in A vorkommt.
3. $\vdash_{\mathcal{F}} t_1 = t_2 \to f(t_1) = f(t_2)$, wobei $t_1, t_2 \in$ Term und f ein einstelliges Funktionssymbol ist. Beschreiben Sie, wie man den Beweis auf mehrstellige Funktionssymbole erweitern kann.

44. Aufgabe: [Gleichheit und F, 10 P]
Es sei

$$\Sigma = \{\forall x \forall y \forall z\ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z, \quad \forall x\ 1 \cdot x = x, \quad \forall x\ x \cdot x = 1\}.$$

Zeigen Sie $\Sigma \vdash_{\mathcal{F}} \forall x\ x \cdot 1 = x$.
Vorsicht, diese Aufgabe ist eine Variante einer bekannten Aufgabe!

45. Aufgabe: [Theorien, 6P]
Zeigen oder widerlegen Sie:

1. Sei M eine Theorie erster Stufe. Es gibt ein Modell I mit $I \models M$ genau dann, wenn M konsistent ist.

2. Falls T eine konsistente, nicht vollständige Theorie erster Stufe ist, dann gibt es eine Formel A, so dass $T \cup \{A\}$ und $T \cup \{\neg A\}$ beide konsistente Theorien sind.

Abgabe: bis 11. Juli 2007, 10:00 Uhr im Kasten neben Raum 34/401.4