2.3 Deduktiver Aufbau der Aussagenlogik

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit einem axiomatischen Aufbau der Aussagenlogik mittels eines **"Deduktiven Systems"** oder eines **„Kalküls"**. Eine syntaktisch korrekte Formel in einem Deduktiven System wird "Theorem" genannt, wenn sie durch rein mechanische Anwendungen der Regeln des Systems aus den Axiomen des Systems "abgeleitet" werden kann. Man kann mehrere deduktive Systeme angeben, in denen aussagenlogische Formeln genau dann Theoreme sind, wenn sie auch Tautologien sind.

2.15 Definition

Ein **Deduktives System** $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathsf{Ax}, R)$ besteht aus

- einem Alphabet Δ (hier $\Delta = V \cup K \cup \{\to, \neg\}$),
- $F \subseteq \Delta^\star$, einer Menge von (wohldefinierten) Formeln (hier die Aussageformen),
- $\mathsf{Ax} \subseteq F$, einer Menge von Axiomen und
- R, einer Menge von Regeln der Form $\dfrac{A_1, \ldots, A_n}{A}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Die Mengen F, Ax und R sind im allgemeinen rekursiv.

Die Menge $T = T(\mathcal{F})$ der **Theoreme** ist definiert durch:

1. $\mathsf{Ax} \in T$ (d.h. alle Axiome sind Theoreme)
2. Sind $A_1, \ldots, A_n \in T$ und ist die Regel $\dfrac{A_1, \ldots, A_n}{A}$ in R, dann ist $A \in T$.

Deduktive Systeme-Kalküle

3. T ist die kleinste Menge von Formeln, die (1) und (2) erfüllt.

Man schreibt für $A \in T(\mathcal{F})$ auch $\vdash_{\mathcal{F}} A$ oder einfach $\vdash A$ und sagt "A ist in $\mathcal{F}$ herleitbar".

Deduktiver Folgerungsbegriff: Sei $\Sigma \subseteq F,\ A \in F$, dann bedeutet $\Sigma \vdash_{\mathcal{F}(Ax,R)} A$ nichts anderes als $\vdash_{\mathcal{F}(Ax\cup\Sigma,R)} A$. Sprechweise: "$A$ ist in $\mathcal{F}$ aus Σ herleitbar".

Sind $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ deduktive Systeme über der Formelmenge F und gilt $T(\mathcal{F}_1) = T(\mathcal{F}_2)$ so nennt man sie **äquivalent.**

2.16 Bemerkung

1. Eigenschaften der Elemente von T werden durch strukturelle Induktion bewiesen. T wird von einer Relation $R' \subseteq F^\star \times F$ erzeugt. Eine Formel A ist ein Theorem oder ist in $\mathcal{F}$ herleitbar, falls es eine endliche Folge von Formeln $B_0, \ldots, B_n$ gibt mit $A \equiv B_n$ und für $0 \leq i \leq n$ gilt:
   $B_i \in$ Ax oder es gibt l und $i_1, \ldots, i_l < i$ und eine Regel $\dfrac{B_{i_1} \ldots B_{i_l}}{B_i} \in R$.
   Die Folge $B_0, \ldots, B_n$ heißt auch **Beweis (Herleitung)** für A in $\mathcal{F}$.

   Das bedeutet $\vdash A$ gilt genau dann, wenn es einen Beweis $B_0, \ldots, B_n$ mit $A \equiv B_n$ gibt.

2. Die Menge T der Theoreme ist rekursiv aufzählbar (denn Ax und R sind rekursiv). Die Menge der Beweise

$$\mathrm{Bew} := \{B_1 \star B_2 \star \ldots \star B_n \mid B_1, \ldots, B_n \text{ ist Beweis}\}$$

ist rekursiv. (Siehe Argumentation von $L(G)$ ist rekursiv aufzählbar für Grammatiken G).
Ist Σ rekursiv entscheidbar, so gelten obige Aussagen entsprechend. Insbesondere ist $Folg_{\mathcal{F}}(\Sigma) = \{A \mid \Sigma \vdash_{\mathcal{F}(Ax,R)} A\}$ rekursiv aufzählbar.

Beachte: Beweise sind im allgemeinen nicht eindeutig. Es wird im allgemeinen nicht verlangt, dass T von R frei erzeugt wird.

3. Gibt es ein deduktives System $\mathcal{F}_0$, so dass $\vdash_{\mathcal{F}_0} A$ genau dann gilt, wenn $\models A$ gilt?
Hierzu werden Ax und R häufig endlich beschrieben durch Schemata. Beispielsweise beschreibt das Axiom
$(A \rightarrow (B \rightarrow A))$ die Menge
$\{A_0|$ es gibt $A, B \in F$ mit $A_0 \equiv (A \rightarrow (B \rightarrow A))\}$
und die Regel $\dfrac{A, A \rightarrow B}{B}$ beschreibt die Menge von Regeln

$$\left\{ \frac{A_0, A_1}{B_0} \mid \text{Es gibt } A, B \in F \text{ mit} \quad A_0 \equiv A, B_0 \equiv B \text{ und } A_1 \equiv A \rightarrow B \right\}.$$

Das deduktive System $\mathcal{F}_0$

2.17 Definition

Das deduktive System $\mathcal{F}_0$ für die Aussagenlogik besteht aus der Formelmenge F_0 der Formeln in $V, \neg, \rightarrow,$ (und). Die Axiomenmenge Ax wird durch folgende Axiomenschemata beschrieben:

Ax1: $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
Ax2: $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
Ax3: $((\neg A) \rightarrow (\neg B)) \rightarrow (B \rightarrow A)$

Dabei beschreiben Ax1, Ax2 und Ax3 disjunkte Formelmengen.
Die Regelmenge R wird beschrieben durch das Regelschema

$$\text{MP:} \quad \frac{A, (A \rightarrow B)}{B} \quad \text{(modus ponens).}$$

Beachte: Ax und R sind rekursiv entscheidbar.

Es genügt zunächst nur Axiome für Formeln in $\rightarrow$ und $\neg$ zu betrachten, da alle anderen Formeln zu einer Formel in $\rightarrow$ und $\neg$ logisch äquivalent sind.

Die Menge der Theoreme von $\mathcal{F}_0$ wird nicht frei erzeugt. Die Modus-Ponens-Regel ist hochgradig <u>nicht</u> eindeutig. $\frac{A, A \rightarrow B}{B}$ und $\frac{A', A' \rightarrow B}{B}$ sind beides Regeln mit gleicher Folgerung. Das erschwert sehr das Finden von Beweisen.

Beispiel

2.18 Beispiel

Für jedes $A \in F_0$ gilt $\vdash (A \longrightarrow A)$, d.h. $(A \longrightarrow A) \in T(\mathcal{F}_0)$

Beweis

$$
\begin{array}{ll}
B_0 \equiv (A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow & \\
\qquad ((A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)) & \text{Ax2} \\
B_1 \equiv A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A) & \text{Ax1} \\
B_2 \equiv (A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A) & \text{MP}(B_0, B_1) \\
B_3 \equiv A \rightarrow (A \rightarrow A) & \text{Ax1} \\
B_4 \equiv A \rightarrow A & \text{MP}(B_2, B_3)
\end{array}
$$

Wie findet man Beweise im System $\mathcal{F}_0$?

Einziger Hinweis: Die Zielformel B, sofern sie kein Axiom ist, muss in der Form $(A_1 \longrightarrow (\ldots(A_n \longrightarrow B)\ldots))$ vorkommen. Wähle geeignete A´s.

Beachte Alle Axiome sind Tautologien der Aussagenlogik. Da diese abgeschlossen gegenüber Modus Ponens sind, sind alle Theoreme von $\mathcal{F}_0$ Tautologien. D.h. $T(\mathcal{F}_0) \subseteq Taut(F_0)$.

Will man in ganz F Beweise führen, so muss man weitere Axiome einführen.
Z.B.

Ax1$\wedge$: $\quad (A \wedge B) \longrightarrow (\neg(A \longrightarrow (\neg B)))$

Ax2$\wedge$: $\quad (\neg(A \longrightarrow (\neg B))) \longrightarrow (A \wedge B)$

Deduktiver Folgerungsbegriff

2.19 Definition Axiomatischer Folgerungsbegriff
Sei $\Sigma \subseteq F_0, A \in F_0$.

1. A ist aus Σ in $\mathcal{F}_0$ **herleitbar**, wenn A sich aus $\mathrm{Ax} \cup \Sigma$ mit den Regeln aus R herleiten lässt, d.h. A ist Theorem im deduktiven System $\mathcal{F}$ mit Axiomenmenge $\mathrm{Ax} \cup \Sigma$ und gleicher Regelmenge wie $\mathcal{F}_0$. Schreibweise $\Sigma \vdash_{\mathcal{F}_0} A$ oder einfach $\Sigma \vdash A$.

   $B_0, \ldots, B_n$ ist ein **Beweis** für $\Sigma \vdash A$, falls $A \equiv B_n$ und für alle $0 \leq i \leq n$ gilt: $B_i \in \mathrm{Ax} \cup \Sigma$ oder es gibt $j, k < i$ mit $B_k \equiv (B_j \rightarrow B_i)$.

2. Σ heißt **konsistent**, falls für keine Formel $A \in F_0$ gilt $\Sigma \vdash A$ und $\Sigma \vdash \neg A$.
   Gibt es eine solche Formel, so heißt Σ **inkonsistent**.

2.20 Folgerung

1. Gilt $\Sigma \vdash A$, so folgt unmittelbar aus der Definition 2.19, dass es eine endliche Teilmenge $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ gibt mit $\Sigma_0 \vdash A$.
   Dies entspricht dem Kompaktheitssatz für "$\models$".
2. Ist Σ inkonsistent, dann gibt es eine endliche Teilmenge $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$, die inkonsistent ist
   (denn ist $\Sigma \subseteq \Gamma$ und $\Sigma \vdash A$, dann gilt auch $\Gamma \vdash A$).

Beweishilfsmittel

3. Ist $\Sigma \subseteq \Gamma$ so $Folg_{\mathcal{F}_0}(\Sigma) \subseteq Folg_{\mathcal{F}_0}(\Gamma)$.
4. Aus $\Sigma \vdash A$ und $\Gamma \vdash B$ für alle $B \in \Sigma$ folgt $\Gamma \vdash A$.

   Ist also $\Sigma \subseteq Folg_{\mathcal{F}_0}(\Gamma)$ so $Folg_{\mathcal{F}_0}(\Sigma) \subseteq Folg_{\mathcal{F}_0}(\Gamma)$.
   Beweise lassen sich also zusammensetzen.
5. Gilt $\Sigma \vdash A$, so ist $\{\Sigma, \neg A\}$ inkonsistent.
   Gilt auch die Umkehrung?
6. Es gilt stets $T(\mathcal{F}_0) \subseteq Folg_{\mathcal{F}_0}(\Sigma)$ für jede Menge Σ.

2.21 Satz Deduktionstheorem

Sei $\Sigma \subseteq F_0$ und seien $A, B \in F_0$.

Dann gilt: $\Sigma, A \vdash B \quad \text{gdw} \quad \Sigma \vdash (A \to B)$

Bew.:

„ $\Leftarrow$ “ Klar wegen MP-Regel.

„ $\Rightarrow$ “ Sei $B_0, \ldots, B_m$ ein Beweis für $\Sigma, A \vdash B$, d.h. $B \equiv B_m$.

Beh.: Für $i = 0, \ldots, m$ gilt $\quad \Sigma \vdash (A \to B_i)$

Induktion nach i und Fallunterscheidung, je nachdem ob B_i gleich A ist, in Ax $\cup\ \Sigma$ liegt oder mit MP-Regel aus B_j, B_k mit $j, k < i$ entsteht.

Anwendungen des Deduktionstheorems

2.22 Beispiel

Beweistransformationen. Wiederverwendung von Beweisen.

Vereinbarungen zur Darstellung von Beweisen:

$B_1, \ldots, B_n$ heißt **abgekürzter Beweis** für $\Sigma \vdash B_n$, falls für jedes j mit $1 \leq j \leq n$ gilt: $\Sigma \vdash B_j$ oder es gibt $j_1, \ldots, j_r < j$ mit $B_{j_1}, \ldots, B_{j_r} \vdash B_j$.
Gibt es einen abgekürzten Beweis für $\Sigma \vdash A$, dann gibt es auch einen Beweis für $\Sigma \vdash A$.

1. $\vdash (A \to A)$ folgt aus dem Deduktionstheorem, da $A \vdash A$ gilt.
2. Um $A \to B, B \to C \vdash A \to C$ zu zeigen, zeige $A, A \to B, B \to C \vdash C$.
3. $\vdash (\neg\neg A \to A)$ dazu genügt es zu zeigen $\neg\neg A \vdash A$

   Beweis:

$B_1 \equiv \neg\neg A$	
$B_2 \equiv \neg\neg A \to (\neg\neg\neg\neg A \to \neg\neg A)$	Ax1
$B_3 \equiv \neg\neg\neg\neg A \to \neg\neg A$	MP
$B_4 \equiv (\neg\neg\neg\neg A \to \neg\neg A) \to (\neg A \to \neg\neg\neg A)$	Ax3
$B_5 \equiv \neg A \to \neg\neg\neg A$	MP
$B_6 \equiv (\neg A \to \neg\neg\neg A) \to (\neg\neg A \to A)$	Ax3
$B_7 \equiv \neg\neg A \to A$	MP
$B_8 \equiv A$	MP

Anwendungen des Deduktionstheorems (Fort.)

4. $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$
   (zeige: $A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$)
5. $\vdash (B \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow A))$
6. $\vdash (\neg B \rightarrow (B \rightarrow A))$ (zu zeigen: $\neg B, B \vdash A$)
   Beweis:

$B_1 \equiv \neg B$	
$B_2 \equiv \neg B \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$	Ax1
$B_3 \equiv \neg A \rightarrow \neg B$	MP
$B_4 \equiv (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$	Ax3
$B_5 \equiv B \rightarrow A$	MP
$B_6 \equiv B$	
$B_7 \equiv A$	MP

7. $\vdash B \rightarrow \neg\neg B$
8. $\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A))$ und
   $\vdash ((\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B))$
9. $\vdash (B \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg(B \rightarrow C)))$
10. $\vdash ((B \rightarrow A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow A))$
11. $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$

Frage: Lassen sich alle Tautologien als Theoreme im System $\mathcal{F}_0$ herleiten ?

Vollständigkeit und Entscheidbarkeit von $\mathcal{F}_0$

2.23 Satz Korrektheit und Vollständigkeit von $\mathcal{F}_0$

Sei $A \in F_0$ eine Formel der Aussagenlogik.

a) Korrektheit: Aus $\vdash_{\mathcal{F}_0} A$ folgt $\models A$, d.h. nur Tautologien können als Theoreme in $\mathcal{F}_0$ hergeleitet werden.

b) Vollständigkeit: Aus $\models A$ folgt $\vdash_{\mathcal{F}_0} A$, d.h. alle Tautologien lassen sich in $\mathcal{F}_0$ herleiten.

Als Hilfsmittel dient:

2.24 Lemma

Sei $A \equiv A(p_1, \ldots, p_n) \in F_0, n > 0$, wobei $p_1, \ldots, p_n$ die in A vorkommenden Aussagevariablen sind. Sei φ eine Bewertung. Ist

$$P_i := \begin{cases} p_i & \text{, falls } \varphi(p_i) = 1 \\ \neg p_i, & \text{falls } \varphi(p_i) = 0 \end{cases} \qquad A' := \begin{cases} A & \text{, falls } \varphi(A) = 1 \\ \neg A, & \text{falls } \varphi(A) = 0 \end{cases}$$

$(1 \leq i \leq n)$, dann gilt $P_1, \ldots, P_n \vdash A'$.

Angenommen das Lemma gilt und sei $\models A$, d.h. $\varphi(A) = 1$ für <u>alle</u> Bewertungen φ.

Sei φ eine Bewertung mit $\varphi(p_n) = 1$. Es gilt $P_1, \ldots, P_n \vdash A$ und wegen $P_n \equiv p_n$ gilt $P_1, \ldots, P_{n-1}, p_n \vdash A$. Betrachtet man eine Bewertung φ' mit $\varphi'(p_n) = 0$ und sonst gleich φ , erhält man $P_1, \ldots, P_{n-1}, \neg p_n \vdash A$.

Durch Anwenden des Deduktionstheorems entstehen daraus
$P_1, \ldots, P_{n-1} \vdash p_n \to A$ und
$P_1, \ldots, P_{n-1} \vdash \neg p_n \to A$.
Gleichzeitig gilt nach dem 10. Beispiel von 2.22 auch $P_1, \ldots, P_{n-1} \vdash ((p_n \to A) \to ((\neg p_n \to A) \to A))$.
Durch zweimaliges Anwenden des Modus-Ponens entsteht
$P_1, \ldots, P_{n-1} \vdash A$.
Dies gilt für jede Wahl der $P_i, i = 1, ..., n-1$ und somit lässt sich das Argument iterieren. D.h. in einer Herleitung von A muss kein p_i verwendet werden, also $\vdash A$.

Das Lemma wird durch Induktion über den Aufbau von A nachgewiesen. D.h. für $A \equiv p_1, \neg C, B \to C$ unter Verwendung von Deduktionen aus Beispiel 2.22.

2.25 Folgerung

Sei $\Sigma \subseteq F_0, A \in F_0$.

1. $\Sigma \vdash_{\mathcal{F}_0} A$ gilt genau dann, wenn $\Sigma \models A$ gilt.
2. Σ ist genau dann konsistent, wenn Σ erfüllbar ist.
3. Σ ist genau dann inkonsistent, wenn Σ unerfüllbar ist.

Beweis der Folgerung

1.

$$
\begin{aligned}
&\Sigma \vdash A \\
&\overset{2.20}{\Longleftrightarrow} \quad \text{Es gibt } A_1, \ldots, A_n \in \Sigma \text{ mit } A_1, \ldots, A_n \vdash_{\mathcal{F}_0} A \\
&\overset{\text{D.T.}}{\Longleftrightarrow} \quad \text{Es gibt } A_1, \ldots, A_n \in \Sigma \text{ mit} \\
&\qquad\qquad \vdash_{\mathcal{F}_0} (A_1 \to (A_2 \to \ldots (A_n \to A) \ldots)) \\
&\overset{2.23}{\Longleftrightarrow} \quad \text{Es gibt } A_1, \ldots, A_n \in \Sigma \text{ mit} \\
&\qquad\qquad \models (A_1 \to (A_2 \to \ldots (A_n \to A) \ldots)) \\
&\overset{\text{D.T.}}{\Longleftrightarrow} \quad \text{Es gibt } A_1, \ldots, A_n \in \Sigma \text{ mit } A_1, \ldots, A_n \models A \\
&\overset{\text{K.S.}}{\Longleftrightarrow} \quad \Sigma \models A
\end{aligned}
$$

2. Σ ist konsistent. $\iff$
Es gibt kein A mit $\Sigma \vdash A$ und $\Sigma \vdash \neg A$. $\iff$
Es gibt kein A mit $\Sigma \models A$ und $\Sigma \models \neg A$. $\iff$
Σ ist erfüllbar (Bemerkung 2.8 c)).

2.4 Natürliche Kalküle

Es gibt andere deduktive Systeme, für die Satz 2.23 gilt. Das deduktive System $\mathcal{F}_0$ wurde von S.C. Kleene eingeführt. Das folgende deduktive System geht auf G. Gentzen zurück.

2.26 Definition Gentzen-Sequenzenkalkül

Eine Sequenz ist eine Zeichenreihe der Form $\Gamma \vdash \Delta$ mit zwei endlichen Mengen von Formeln Γ und Δ.
Seien $\Gamma, \Delta \subseteq F$ endliche Mengen von Formeln und $A, B \in F$.

Der Kalkül für Objekte der Form $\Gamma \vdash_G \Delta$ wird definiert durch:

die Axiome :

Ax1: $\Gamma, A \vdash_G A, \Delta$
Ax2: $\Gamma, A, \neg A \vdash_G \Delta$
Ax3: $\Gamma \vdash_G A, \neg A, \Delta$

die Regeln :

$\mathbf{R}_{\wedge,\vee}$: $\dfrac{\Gamma, A, B \vdash_G \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash_G \Delta}$ $\qquad \dfrac{\Gamma \vdash_G A, B, \Delta}{\Gamma \vdash_G (A \vee B), \Delta}$

$\mathbf{R}_{\rightarrow}$: $\dfrac{\Gamma, A \vdash_G \Delta, B}{\Gamma \vdash_G (A \rightarrow B), \Delta}$ $\qquad \dfrac{\Gamma \vdash_G A, \Delta\,; \quad \Gamma, B \vdash_G \Delta}{\Gamma, (A \rightarrow B) \vdash_G \Delta}$

$\mathbf{R}_{\neg}$: $\dfrac{\Gamma, A \vdash_G \Delta}{\Gamma \vdash_G \neg A, \Delta}$ $\qquad \dfrac{\Gamma \vdash_G A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash_G \Delta}$

$\mathbf{R}_{\wedge'}$: $\dfrac{\Gamma \vdash_G A, \Delta\,; \quad \Gamma \vdash_G B, \Delta}{\Gamma \vdash_G (A \wedge B), \Delta}$

$\mathbf{R}_{\vee'}$: $\dfrac{\Gamma, A \vdash_G \Delta\,; \quad \Gamma, B \vdash_G \Delta}{\Gamma, (A \vee B) \vdash_G \Delta}$

Gentzen-Sequenzenkalkül

$\Gamma \vdash_G \Delta$ ist ableitbar bedeutet: Es gibt ein $r \in \mathbb{N}$ und eine Folge von Sequenzen $\Gamma_1 \vdash_G \Delta_1, \dots, \Gamma_r \vdash_G \Delta_r$ mit

1. $\Gamma_r \equiv \Gamma$ und $\Delta_r \equiv \Delta$
2. Jedes $\Gamma_j \vdash_G \Delta_j$ mit $1 \leq j \leq r$ ist Axiom oder geht aus vorangehenden Folgegliedern aufgrund einer Regel hervor.

2.27 Bemerkung Semantische Interpretation

Die Aussage $\Gamma \vdash_G \Delta$ kann wie folgt anschaulich interpretiert werden: Für jede Bewertung φ gibt es eine Formel $A \in \Gamma$ mit $\varphi(A) = 0$ oder es gibt eine Formel $B \in \Delta$ mit $\varphi(B) = 1$. Sind $\Gamma = \{A_1, \dots, A_n\}$ und $\Delta = \{B_1, \dots, B_m\}$, also endlich, entspricht dies also der Formel $(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \rightarrow (B_1 \vee \cdots \vee B_m)$.

Der Semantische Folgerungsbegriff $\Sigma \models A$ für eine Menge von Formeln $\{\Sigma, A\}$ kann wie folgt auf Mengenpaare Γ, Δ erweitert werden:

$$\Gamma \models \Delta \quad \text{gdw} \quad \Gamma \models A$$

wobei A die Disjunktion der Formeln in Δ ist.

Interpretiert man in einer Sequenz $\Gamma \vdash_G \Delta$ die Menge Γ als Voraussetzungen, und die Menge Δ als Konklusion, so lässt sich die Korrektheit des Kalküls leicht nachweisen.

Es gilt also:

Aus $\Gamma \vdash_G \Delta$ folgt $\Gamma \models \Delta$. (**Übung**)

Beispiel

Es gilt auch die Umkehrung dieser Aussage, d.h. der Sequenzenkalkül von Gentzen ist korrekt und vollständig. (Bew. siehe z.B. Kleine Büning/Lettmann: Aussagenlogik, Deduktion und Algorithmen)

2.28 Beispiel

Es gilt $p \vee q, (\neg p) \vee r \vdash_G q \vee r$

Beweis:

$B_1 \equiv q, r \vdash q, r$	Ax1
$B_2 \equiv q, \neg p \vdash q, r$	Ax1
$B_3 \equiv q, (\neg p) \vee r \vdash q, r$	$R_{\vee'}$(1,2)
$B_4 \equiv p, r \vdash q, r$	Ax1
$B_5 \equiv \neg p, p \vdash q, r$	Ax2
$B_6 \equiv p, (\neg p) \vee r \vdash q, r$	$R_{\vee'}$(4,5)
$B_7 \equiv p \vee q, (\neg p) \vee r \vdash q, r$	$R_{\vee'}$(3,6)
$B_8 \equiv p \vee q, (\neg p) \vee r \vdash q \vee r$	$R_{\vee}$(7)

2.29 Bemerkung Weitere Kalküle für die Aussagenlogik

Man findet in der Literatur eine Vielzahl von „natürlichen“ Kalkülen (deduktiven Systemen), die ebenfalls korrekt und vollständig sind. Für diese werden auch Beweisstrategien für so genannte „Goals“ und „Subgoals“ vorgestellt.

Als Beispiel Hilberts Kalkül, das z.B. für jeden Operator eine Regel für die Einführung und eine für die Entfernung des Operators enthält.

Hilberts Kalkül

Konjunktion	$\wedge\_I$:	$\dfrac{p, q}{p \wedge q}$	$\wedge\_E$:	$\dfrac{p \wedge q}{p}$
Disjunktion	$\vee\_I$:	$\dfrac{p}{p \vee q}$	$\vee\_E$:	$\dfrac{p \vee q, \neg p}{q}$
Implikation	$\rightarrow\_E$:	$\dfrac{p, p \rightarrow q}{q}$ Modus Ponens	$\rightarrow\_E$:	$\dfrac{\neg q, p \rightarrow q}{\neg p}$ Modus Tollens
Negation	$\neg\_E$:	$\dfrac{p, \neg p}{q}$ Widerspruchsregel	$\neg\_E$:	$\dfrac{\neg\neg p}{p}$ Doppelnegation
Äquivalenz	$\leftrightarrow\_E$:	$\dfrac{p \leftrightarrow q}{p \rightarrow q}$	$\leftrightarrow\_E$:	$\dfrac{p \leftrightarrow q}{q \rightarrow p}$

Transitivität $\quad \leftrightarrow\_I : \dfrac{p \leftrightarrow q, q \leftrightarrow r}{p \leftrightarrow r}$

Deduktions - Theorem $\quad \rightarrow\_I : \dfrac{p, \ldots, r, \underline{s} \vdash t}{p, \ldots, r \vdash s \rightarrow t}$

Reductio ad absurdum $\quad \neg\_I : \dfrac{p, \ldots, r, \underline{s} \vdash t, p, \ldots, r, \underline{s} \vdash \neg t}{p, \ldots, r \vdash \neg s}$

Hypothetischer Syllogismus $\quad \dfrac{p \rightarrow q, q \rightarrow r}{p \rightarrow r}$

Konstruktives Dilemma $\quad \dfrac{p \rightarrow q, r \rightarrow s, p \vee r}{q \vee s}$

Hinzukommen die üblichen Assoziativitäts-, Kommutativitäts-, Distributivitäts-, Negations-, Implikations- und de Morgan Regeln.

Beispiel

2.30 Beispiel Zeige $(p \wedge q) \vee r \vdash \neg p \to r$

Transformationsbeweis

1.	$(p \wedge q) \vee r$	Prämisse
2.	$r \vee (p \wedge q)$	Kommutativität
3.	$(r \vee p) \wedge (r \vee q)$	Distributivität
4.	$(r \vee p)$	$\wedge\_E$
5.	$(p \vee r)$	Kommutativität
6.	$(\neg\neg p \vee r)$	Negations-Gesetz
7.	$\neg p \to r$	Implikations-Gesetz

Bedingter Beweis

1.	$(p \wedge q) \vee r$	Prämisse
2.	$\neg(\neg p \vee \neg q) \vee r$	Doppelnegation, de Morgan
3.	$(\neg p \vee \neg q) \to r$	Implikationsgesetz
4.	$\neg p$	Annahme
5.	$\neg p \vee \neg q$	$\vee\_I$
6.	r	Modus Ponens $\to\_E$ aus 3. und 5.
7.	$\neg p \to r$	Aus 4, 5, 6 mit Ded. Theo. $\to\_I$

Indirekter Beweis

1.	$(p \wedge q) \vee r$	Prämisse
2.	$(p \vee r) \wedge (q \vee r)$	Distributivgesetz
3.	$(p \vee r)$	$\wedge\_E$
4.	$\neg(\neg p \to r)$	Annahme
5.	$\neg(p \vee r)$	Implikations-und Negationsgesetz
6.	$\neg\neg(\neg p \to r)$	Red. Abs. $\to\_I$ aus 3, 4, 5.
7.	$\neg p \to r$	Doppelnegation