3.4 Unentscheidbarkeit der Allgemeingültigkeit

3.20 Satz

Es gibt eine Menge von Formeln in den Konstanten a (0-stellig), f_0, f_1 (1-stellig) und der Prädikatskonstanten p (2-stellig), für die die Allgemeingültigkeit unentscheidbar ist.
(In den Formeln kommt keine „=“ vor).

Beweis: Reduziere effektiv unentscheidbares Problem (z.B. PCP) auf die Entscheidung der Allgemeingültigkeit bestimmter Formeln.

PCP: $\Sigma = \{0, 1\} \quad S = \{(\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_n, \beta_n)\} \;\; n \geq 1$
mit $\alpha_i, \beta_i \in \Sigma^*$
S hat eine **Lösung** gdw es gibt $j_1, \ldots, j_l \in [1 \ldots n], l > 0$ mit

$$\alpha_{j1}\alpha_{j2} \cdots \alpha_{jl} \equiv \beta_{j1}\beta_{j2} \cdots \beta_{jl}$$

z. B.
$S = ((0, 000), (0100, 01), (001, 1))$ hat die Lösung
$j_1 = 1, j_2 = 3$, $0001 \equiv 0001$.

Problem PCP: Eingabe S. Entscheide, ob S Lösung hat.
Ist nicht rekursiv entscheidbar (aber rekursiv aufzählbar).

Reduktion: Zu S finde eine Formel A_S mit S hat Lösung gdw A_S ist allgemeingültig.

Unentscheidbarkeit der Allgemeingültigkeit (Forts.)

Sprache PL1 mit:
a F-Konstante, f_0, f_1 1-st. F-Konstanten, p 2-stellige P-Konstante.

$\sigma_i \in \{0, 1\}$ $(1 \leq i \leq m)$, so
$f_{\sigma_m}(\cdots(f_{\sigma_2}(f_{\sigma_1}(x)))\cdots)$ Term, als Kodierung von Wörter: $f_{\underbrace{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_m}_{\in\Sigma^*}}(x)$. Beachte die Reihenfolge!

$S = \{(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \cdots, (\alpha_n, \beta_n)\}$ $n \geq 1$ $\Sigma = \{0, 1\}$

$$
\begin{aligned}
A_S \equiv & \bigwedge_{j=1}^{n} p(f_{\alpha_j}(a), f_{\beta_j}(a)) \wedge \\
& \forall x \forall y [p(x, y) \rightarrow \bigwedge_{j=1}^{n} p(f_{\alpha_j}(x), f_{\beta_j}(y))] \\
& \rightarrow \exists z p(z, z)
\end{aligned}
$$

Beispiel: Die zugeordnete Formel A_S ist

$$
[p(f_0(a), f_{000}(a)) \wedge p(f_{0100}(a), f_{01}(a)) \wedge p(f_{001}(a), f_1(a)) \wedge \\
\forall x \forall y [\bigwedge_{1 \leq j \leq 3} p(x, y) \rightarrow p(f_{\alpha_j}(x), f_{\beta_j}(x))]] \rightarrow \exists z p(z, z)
$$

Behauptung:

S hat Lösung gdw A_S allgemeingültig.

Unentscheidbarkeit der Allgemeingültigkeit (Forts.)

Beweis der Behauptung:

„$\curvearrowleft$“ angenommen A_S allgemeingültig, I Interpretation mit
$D = \{0,1\}^*$, $a \leftarrow \varepsilon$, $f_0 : x \to x0$, $f_1 : x \to x1$
$p(x,y)$ gdw $x \equiv \alpha_{j_1} \cdots \alpha_{jm}$, $y \equiv \beta_{j_1} \ldots \beta_{jm}$ für
$j_1, \ldots, j_m$ $(j_i \in [1 \ldots n]\ \ m > 0)$.

„$\curvearrowright$“ angenommen PCP S habe Lösung $j_1 \ldots j_m$, d. h.
$\alpha_{j_1}\alpha_{j_2} \cdots \alpha_{jm} \equiv \beta_{j_1}\beta_{j_2} \ldots \beta_{jm}$
$\rightsquigarrow p(f_{\alpha_{j_1}\alpha_{j_2}\cdots\alpha_{jm}}(a), f_{\beta_{j_1}\beta_{j_2}\ldots\beta_{jm}}(a))$ wahr, also ist
A_S allgemeingültig.

Es gibt weitere Unentscheidbarkeitsresultate die wie später noch behandeln werden. Es sei jedoch erwähnt, dass die Grenzen zwischen den entscheidbaren und unentscheidbaren Fälle der Allgemeingültigkeit sehr genau bekannt sind. (Siehe etwa Börger).

Hauptsätze der Prädikatenlogik erster Stufe

Sei $\mathcal{L}$ Sprache der PL1

a) Die Menge der allgemeingültigen Formeln $\{A \in \mathbf{Form}(\mathcal{L}) : \models A\}$ ist **rekursiv aufzählbar** (i. Allg. nicht rekursiv entscheidbar). Es gibt ein deduktives System $\mathcal{F}$ für $\mathcal{L}$ mit

$$\underset{\mathcal{F}}{\vdash} A \;\text{ gdw }\; \models A \quad (A \in \mathbf{Form}(\mathcal{L}))$$

b) **Kompaktheitssatz für PL1** Sei $\Sigma \subseteq \mathbf{Form}(\mathcal{L})$.
Σ erfüllbar gdw jede endliche Teilmenge von Σ ist erfüllbar.

c) Insbesondere: $\Sigma \subseteq \mathbf{Form}(\mathcal{L})$, $A \in \mathbf{Form}(\mathcal{L})$:

$$\Sigma \models A \text{ gdw es gibt } \Sigma_0 \subseteq \Sigma, \Sigma_0 \text{ endlich} : \Sigma_0 \models A$$

d) **Satz von Löwenheim-Skolem:**
$\Sigma \subseteq \mathbf{Form}(\mathcal{L})$ erfüllbar gdw
es gibt eine Interpretation $I = (D, I_c, I_v)$, wobei D abzählbar oder endlich ist, die Σ erfüllt.
(D kann als eine Termmenge über die konstanten Symbole gewählt werden).

Beachte jedoch: nicht gültig für PL2

Hauptsätze der Prädikatenlogik erster Stufe (Forts.)

3.21 Satz von Gödel:

Für Sprachen von PL2- und PL2 Formeln:

a) Die Menge der allgemeingültigen Formeln 2-Stufe für PL2-Sprachen ist nicht rekursiv aufzählbar.
b) Es gibt kein rekursives „deduktives System“, dessen Theoreme die Menge der allgemeingültigen Formeln zweiter Stufe sind.
c) Es gibt erfüllbare Mengen von Formeln 2-Stufe, die keine abzählbaren Modelle haben.

3.22 Definition Deduktive Systeme für PL1

Sei $\mathcal{L}$ Sprache 1-Stufe mit Formeln in $\neg, \rightarrow, \forall, =$. $\mathcal{F} = (\mathbf{Ax}, \mathbf{R})$ bestimmt durch Axiomenmenge Ax (Axiomenschema) und Menge R von Regeln (Regelschema).

• Ax enthält **alle Generalisierungen** von folgenden durch Schemata beschriebenen Formelmengen:

Ax1: $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
Ax2: $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
Ax3: $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$
Ax4: $\forall x\ A \rightarrow A_x[t]$, falls $A_x[t]$ erlaubt

Deduktive Systeme für PL1 (Forts.)

Ax5: $\forall x\ (A \rightarrow B) \rightarrow (\forall x\ A \rightarrow \forall x\ B)$

(Ax5': $\forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \forall x B)$ x nicht frei in A)

Ax6: $A \rightarrow \forall x\ A$, falls x nicht frei in A vorkommt

Ax7: $x = x$

Ax8: $x = y \rightarrow (A \rightarrow A')$, wobei A' aus A durch Ersetzen einiger freier Vorkommen von x durch y (erlaubt)

- R enthält alle Regeln, die vom **Regelschema Modus Ponens**

MP $\dfrac{A, A \rightarrow B}{B}$ Modus Ponens beschrieben werden.

Alternatives Deduktionssystem $\mathcal{F}' = (\mathbf{Ax}, \mathbf{R}')$

R' enthält MP-Regel und **Generalisierungsregel.**

GR $\dfrac{A}{\forall x A}$ Generalisierung (ohne Einschränkungen)

Beachte: Ax enthält nur allgemeingültige Formeln. MP und GR-Regel führen nicht aus der Menge der allgemeingültigen Formeln hinaus.

Ziel

- $\underset{\mathcal{F}}{\vdash} A$ gdw $\underset{\mathcal{F}'}{\vdash} A$ gdw $\models A$

  $\rightsquigarrow$ $\rightsquigarrow$ Korrektheit
- $\Sigma \underset{\mathcal{F}}{\vdash} A$ gdw $\Sigma \models A$

  $\rightsquigarrow$ Korrektheit
- $\Sigma \underset{\mathcal{F}}{\vdash} A$, so $\Sigma \underset{\mathcal{F}'}{\vdash} A$ Umkehrung i. Allg. nicht
- $\Gamma \underset{\mathcal{F}'}{\vdash} A \not\rightsquigarrow \Gamma \underset{\mathcal{F}}{\vdash} A$ (nur für Γ Abg. Formeln).

z. B. $p(x) \underset{\mathcal{F}'}{\vdash} \forall x p(x)$ aber $p(x) \not\models \forall x p(x)$

Bemerkung: Alle Tautologien (taut. Theorem) sind herleitbar in $\mathcal{F}$, d. h. Theoreme von $\mathcal{F}$.

3.23 Beispiel

1. $\underset{\mathcal{F}}{\vdash} \forall x\ (p(x) \to \exists y\ p(y))$

$B_1 \equiv \forall x\ [(\forall y\ \neg p(y) \to \neg p(x)) \to (p(x) \to \neg \forall y\ \neg p(y))]$ (Ax3,Gen)

$B_2 \equiv \forall x\ ((\forall y\ \neg p(y) \to \neg p(x)) \to (p(x) \to \neg \forall y\ \neg p(y))) \to [\forall x\ (\forall y\ \neg p(y) \to \neg p(x)) \to \forall x\ (p(x) \to \neg \forall y\ \neg p(y))]$ (Ax5)

$B_3 \equiv \forall x\ (\forall y\ \neg p(y) \to \neg p(x)) \to \forall x\ (p(x) \to \neg \forall y\ \neg p(y))$ (MP)

$B_4 \equiv \forall x\ (\forall y\ \neg p(y) \to \neg p(x))$ (Ax4,Gen)

$B_5 \equiv \forall x\ (p(x) \to \exists y\ p(y))$ (MP)

Beispiele (Forts.)

2. $\vdash_{\mathcal{F}} \forall x\ A \to \exists x\ A$

   Beweis:

$$
\begin{array}{ll}
\vdash \forall x\ \neg A \to \neg A & \text{(Ax4)} \\
\vdash (\forall x\ \neg A \to \neg A) \to (A \to \neg \forall x\ \neg A) & \text{(Ax3)} \\
\vdash A \to \neg \forall x\ \neg A & \text{(MP)} \\
\vdash \forall x\ A \to A & \text{(Ax4)} \\
\vdash (\forall x\ A \to A) \to & \\
\quad ((A \to \neg \forall x\ \neg A) \to (\forall x\ A \to \neg \forall x\ \neg A)) & \text{(Taut)} \\
\vdash (A \to \neg \forall x\ \neg A) \to (\forall x\ A \to \neg \forall x\ \neg A) & \text{(MP)} \\
\vdash \forall x\ A \to \exists x\ A & \text{(MP)}
\end{array}
$$

3. $\vdash t = t \qquad \vdash (x = y) \to (y = x)$

   $\vdash ((x = y) \to ((y = z) \to (x = z))$

   Folgen aus Ax, $\forall x(x = x)$, $(x = y) \to A(x) \leftrightarrow A(y))$ für A (erlaubt).

   $\vdash ((t_1 = t_1') \wedge \cdots \wedge (t_n = t_n')) \to (A(t_1, \ldots, t_n) \leftrightarrow A(t_1', \ldots, t_n'))$, wobei $A(x_1, \ldots, x_n)$ eine Formel mit mindestens n-freien Variablen und Substitutionen erlaubt $(x_i \leftarrow t_i$ bzw. $x_i \leftarrow t_i')$.

   Spezialfall:

   $\vdash ((t_1 = t_1' \wedge \cdots \wedge (t_n = t_n')) \to (f(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1', \ldots, t_n'))$

Beweisidee

$$\forall x[(x = y) \rightarrow (A(x) \leftrightarrow A(y))]$$
$$\forall x[(x = y) \rightarrow (A(x) \leftrightarrow A(y))] \rightarrow ((t = y) \rightarrow (A(t) \leftrightarrow A(y))$$
$$(t = y) \rightarrow (A(t) \leftrightarrow A(y))$$
$$\forall y(t = y) \rightarrow (A(t) \leftrightarrow A(y))$$
$$(t = t') \rightarrow (A(t) \leftrightarrow A(t'))$$