SS 2002 3. Juli 2002

Übungen zur Vorlesung

Logik

Prof. Dr. Klaus Madlener Blatt 10

41. Aufgabe: Es sei

$$\Sigma = \{\forall x \forall y \forall z\ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z, \quad \forall x\ x \cdot 1 = x, \quad \forall x\ x \cdot x = 1\}.$$

Zeigen Sie $\Sigma \models \forall x\ 1 \cdot x = x$ mit der Tableaux-Methode.

42. Aufgabe: Konstruieren Sie mit der Tableaux-Methode ein Modell für

$$\{\exists x \exists y \exists z\ (\neg x = y \wedge \neg x = z)\}$$

43. Aufgabe: Es seien $\mathcal{A} = (A, I_c)$ und $\mathcal{B} = (B, J_c)$ *algebraische Strukturen* (d.h. Interpretationen ohne Belegung der Variablen). Eine bijektive Abbildung $h : A \to B$ heißt Isomorphismus zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, wenn für alle n-stelligen Funktionskonstanten f (auch 0-stellige) und alle $a_1, \ldots, a_n \in A$

$$h(I_c(f)(a_1, \ldots, a_n)) = J_c(f)(h(a_1), \ldots, h(a_n))$$

gilt und für alle n-stelligen Prädikatskonstanten p (auch 0-stellige) und alle $a_1, \ldots, a_n \in A$

$$I_c(p)(a_1, \ldots, a_n) = J_c(f)(h(a_1), \ldots, h(a_n))$$

gilt. Gibt es einen Isomorphismus zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, sagt man $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sind zueinander *isomorph*.

Zeigen Sie

1. $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}$ sind isomorph zueinander.
2. Gibt es einen Isomorphismus zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, so gibt es auch einen zwischen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{A}$.
3. Gibt es Isomorphismen zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sowie zwischen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$, so gibt es auch einen Isomorphismus zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{C}$.

Die "Isomorphzueinanderseinsrelation" ist also eine Äquivalenzrelation.

44. Aufgabe: Es sei A eine Formel ohne freie Variablen und $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ seien zueinander isomorph.

Genau dann gilt $\mathcal{A} \models A$, wenn $\mathcal{B} \models A$ gilt.

45. Aufgabe: Zwei algebraische Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ heißen *elementar äquivalent,* wenn für alle abgeschlossenen Formeln A der Prädikatenlogik erster Stufe genau dann $\mathcal{A} \models A$ gilt, wenn $\mathcal{B} \models A$ gilt.

Aus Aufgabe 44 wissen wir, dass isomorphe Strukturen stets elementar äquivalent sind. Zeigen Sie, dass die Umkehrung nicht gilt, indem Sie zwei elementar äquivalente Strukturen angeben, die nicht zueinander isomorph sind.